



**Paulo Sérgio Almeida
Ferreira**

**Homogeneização de Propriedades Termoelásticas
de Materiais Compósitos**



**Paulo Sérgio Almeida
Ferreira**

**Homogeneização de Propriedades Termoelásticas
de Materiais Compósitos**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob a orientação científica do Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho-da-Cruz, Professor Auxiliar Convidado da Universidade de Aveiro e co-orientação do Doutor Filipe Miguel Horta e Vale Teixeira-Dias, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Professor Doutor Francisco José Malheiro Queirós de Melo
Professor Associado da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de
Coimbra.

Professor Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho-da-Cruz
Professor Auxiliar Convidado da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Filipe Miguel Horta e Vale Teixeira-Dias
Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Ao Professor Doutor Joaquim Alexandre Mendes de Pinho-da-Cruz, pelo incansável apoio prestado e rigoroso carácter científico aplicado na condução da tese.

Ao Professor Doutor Filipe Teixeira-Dias, pelo apoio logístico e revisão da tese.

Ao Mestre João Alexandre Oliveira, pela disponibilidade demonstrada e ajuda sobretudo na constituição da parte gráfica da tese.

Aos meus pais Isabel Maria Pinto Almeida e Carlos Henrique Jesus Ferreira, pelos sacrifícios necessários na educação de um filho.

Aos meus avós Maria d'Alegria e Arménio d'Almeida um sentido e sincero para sempre Obrigado.

palavras-chave

Materiais Compósitos; Elementos Finitos; Termoelasticidade Linear; Homogeneização por Expansão Assimptótica; Células Representativas Unitárias.

resumo

A modelação numérica detalhada do comportamento termomecânico de componentes estruturais constituídos por materiais compósitos requer geralmente o conhecimento prévio das suas propriedades macroscópicas. Por um lado, através de modelos analíticos é possível obter estimativas para os valores das propriedades efectivas dos materiais, assim como majorantes e minorantes para esses valores. Por outro lado, é possível utilizar métodos de natureza numérica, de entre os quais se destaca a homogeneização por expansão assimptótica. O recurso a metodologias de homogeneização pode trazer benefícios computacionais bastante significativos. Esta técnica permite a substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, permitindo, assim, a obtenção de leis de comportamento macroestruturais a partir de informação relativa ao nível microestrutural.

Neste trabalho procede-se a um estudo comparativo das propriedades termoelásticas de materiais compósitos obtidas através de procedimentos numéricos de homogeneização por expansão assimptótica e de modelos analíticos com resultados experimentais obtidos a partir de fontes bibliográficas.

keywords

Composite Materials; Finite Elements; Linear Thermoelasticity; Asymptotic Expansion Homogenisation; Representative Unit-Cells.

abstract

The detailed numerical modelling of the thermomechanical behaviour of structural components built from composite materials requires, in general, the previous knowledge of their macroscopic properties. With analytical models it is possible to estimate effective properties of materials, as well their upper and lower bounds. On the other hand, numerical methods can also be used in this task, being the asymptotic expansion homogenisation method one of the most relevant ones. The use of homogenisation methodologies may lead to significant computational benefits. This technique permits the replacement of a heterogeneous medium by an equivalent homogeneous medium, leading to macrostructural behaviour models based on the information available from microstructural level.

In this work, numerical asymptotic expansion homogenisation procedures are used to obtain the effective values of thermomechanical properties of composite materials. These values are compared with the ones obtained with analytical models and with experimental values obtained from bibliography.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Nota Introdutória	1
1.2	Objectivos	2
2	Homogeneização por Expansão Assimptótica em Termoelasticidade	3
3	Modelos Analíticos de Previsão	9
3.1	Propriedades Mecânicas de Materiais Compósitos	9
3.2	Propriedades Termoelásticas de Materiais Compósitos	12
3.3	Propriedades Térmicas de Materiais Compósitos	13
4	Procedimentos Numéricos	15
5	Propriedades dos Materiais	17
6	Apresentação e Discussão de Resultados	21
6.1	Células Representativas Unitárias	21
6.2	Propriedades Elásticas de Materiais Compósitos	22
6.2.1	Material compósito de resina epóxida reforçado com fibra de vidro .	22
6.2.2	Material compósito de nitrato de alumínio reforçado com alumina . .	24
6.2.3	Material compósito de cobalto reforçado com carboneto de tungsténio	29
6.3	Propriedades Termoelásticas de Materiais Compósitos	31
6.3.1	Material compósito de nitrato de alumínio reforçado com alumina . .	33
6.3.2	Material compósito de cobre reforçado com diamante	35
6.4	Propriedades Térmicas de Materiais Compósitos	37
6.4.1	Material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com alumina	37
6.4.2	Material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com estanho	38
6.4.3	Material compósito de politetrafluoroetileno reforçado com grafite . .	40
6.4.4	Material compósito de resina epóxida reforçado com sílica	42
6.4.5	Material compósito de resina epóxida reforçado com alumina	42
6.4.6	Material compósito de vidro reforçado com alumina	45
7	Conclusões Gerais	47

Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática da célula unitária Y associada à microescala e do material termoelástico heterogêneo Ω , utilizados no processo de homogeneização assintótica, de que resulta o material homogêneo Ω^h , com $\varepsilon \rightarrow 0$.	4
2.2	Ilustração esquemática da aproximação de primeira ordem da expansão assintótica do campo de temperaturas, para um caso unidimensional — o campo de temperaturas, em Ω , é aproximado pela sobreposição do campo homogeneizado da macroescala, em Ω^h , com as flutuações de primeira ordem oriundas da Y -periodicidade do campo da microescala, em Y .	7
6.1	Geometrias das células representativas unitárias geradas com partículas esféricas, para fracções volúmicas de reforço de (a) 10%, (b) 20%, (c) 30%, (d) 40% e (e) 50%.	21
6.2	Malhas de elementos finitos obtidas com base em estudos de convergência, para as células representativas unitárias com fracções volúmicas de reforço de (a) 10%, (b) 20%, (c) 30%, (d) 40% e (e) 50%.	22
6.3	Componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro.	22
6.4	Variação do módulo de elasticidade longitudinal com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro, para um material compósito de matriz de resina epóxida.	23
6.5	Resultados experimentais e de previsão analítica, com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para o módulo de elasticidade longitudinal de um material compósito de resina epóxida com partículas esféricas de fibra de vidro.	24
6.6	Variação do coeficiente de Poisson com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro, para um material compósito de matriz de resina epóxida.	25
6.7	Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de resina epóxida com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13} .	26

6.8	Vectores das solicitações mecânicas características da célula representativa unitária de material compósito de resina epóxida com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro — modos normais (a) \mathbf{F}_{11}^D , (b) \mathbf{F}_{22}^D e (c) \mathbf{F}_{33}^D , e modos de corte (d) \mathbf{F}_{12}^D , (e) \mathbf{F}_{23}^D e (f) \mathbf{F}_{13}^D	27
6.9	Componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de nitrato de alumínio com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.	28
6.10	Variação do módulo de elasticidade longitudinal com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.	28
6.11	Resultados experimentais e de previsão analítica do módulo de elasticidade longitudinal, em conjunto com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para um material compósito de nitrato de alumínio com partículas esféricas de alumina.	29
6.12	Variação do coeficiente de Poisson com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.	30
6.13	Variação do coeficiente de Poisson com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.	30
6.14	Componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de cobalto com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de carboneto de tungsténio.	31
6.15	Variação do módulo de elasticidade longitudinal com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de carboneto de tungsténio, para um material compósito de matriz de cobalto.	32
6.16	Resultados experimentais e de previsão analítica do módulo de elasticidade longitudinal, em conjunto com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para um material compósito de cobalto com partículas esféricas de carboneto de tungsténio.	32
6.17	Componentes dos vectores dos módulos térmicos, β^h , para células unitárias de material compósito de nitrato de alumínio com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.	33
6.18	Variação do coeficiente de expansibilidade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.	34
6.19	Campo dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, Ψ , de uma célula representativa unitária de material compósito de nitrato de alumínio com 30% de partículas esféricas de alumina — representação da configuração deformada da célula representativa unitária.	34
6.20	Componentes dos vectores dos módulos térmicos, β^h , para células unitárias de material compósito de cobre com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de diamante.	35
6.21	Variação do coeficiente de expansibilidade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de diamante, para um material compósito de matriz de cobre, com os resultados de previsão numérica.	36

6.22	Variação do coeficiente de expansibilidade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de diamante, para um material compósito de matriz de cobre, com os resultados experimentais.	36
6.23	Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.	37
6.24	Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de polietileno de alta densidade.	38
6.25	Ilustração do campo de deslocamentos termocaracterísticos, Υ , da célula representativa unitária associada ao material compósito de polietileno de alta densidade com 30% de partículas esféricas de alumina.	39
6.26	Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de estanho.	39
6.27	Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de estanho, para um material compósito de matriz de polietileno de alta densidade.	40
6.28	Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de politetrafluoroetileno com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de grafite.	41
6.29	Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de grafite, para um material compósito de matriz de politetrafluoroetileno.	42
6.30	Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de sílica.	43
6.31	Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de sílica, para um material compósito de matriz de resina epóxida.	43
6.32	Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.	44
6.33	Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de resina epóxida.	44
6.34	Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de vidro com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.	45
6.35	Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de vidro.	46

Lista de Tabelas

5.1	Módulos de elasticidade, E , para os materiais considerados.	17
5.2	Coefficientes de Poisson, ν , para os materiais considerados.	18
5.3	Coefficientes de expansibilidade térmica, α , para os materiais considerados. .	18
5.4	Coefficientes de condutividade térmica, k , para os materiais considerados. . .	19

Capítulo 1

Introdução

1.1 Nota Introdutória

Os materiais compósitos têm vindo ao longo dos anos a ganhar grande expressão quanto à sua utilização, principalmente em engenharia. Estes materiais são constituídos por duas ou mais fases e caracterizam-se por apresentar heterogeneidades. Quando um destes materiais é sujeito a uma mudança de temperatura, a diferença entre os coeficientes de expansibilidade térmica das fases constituintes originam o aparecimento de tensões de ordem térmica, que resultam da referida heterogeneidade microestrutural. Ao invés, um material homogéneo deforma-se, mas os níveis de tensão mantêm-se nulos. Não raras vezes a combinação das tensões de origem mecânica com as tensões de origem térmica pode levar a fenómenos de cedência ou de ruptura do material, em situações de carregamento termomecânico. Nestas condições, torna-se indispensável conhecer as propriedades termomecânicas efectivas dos materiais constituintes por forma a se ter um melhor conhecimento das propriedades dos materiais compósitos.

As propriedades termomecânicas efectivas dos materiais compósitos podem ser determinadas recorrendo a modelos analíticos ou a simulação numérica. Os modelos analíticos são normalmente associados a materiais compósitos com geometrias simples, constituídos por inclusões esféricas ou cilíndricas, de onde se podem retirar não só as propriedades termomecânicas efectivas mas também os minorantes e majorantes dessas mesmas propriedades. No entanto para materiais compósitos com geometrias complexas recorre-se à simulação numérica e em particular à modelação por elementos finitos. Mas para uma correcta definição dos detalhes microestruturais tem-se a necessidade de utilizar não só malhas não-estruturadas como um grande número de elementos finitos. Mesmo em termos de termoelasticidade linear, a modelação numérica do comportamento termomecânico deste tipo de componentes estruturais fica de certa forma impossibilitada de se realizar, devido ao facto de ser necessário o uso de grande memória computacional e consequentemente de tempos de computação demasiado longos.

Deste modo, para se reduzir esses tempos e os elevados custos envolvidos na modelação numérica de componentes estruturais de materiais compósitos, pode recorrer-se a metodologias de homogeneização. Estas metodologias permitem a substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, dando origem a leis de comportamento macroestruturais a partir de informação relativa ao nível microestrutural.

Os materiais compósitos apresentam heterogeneidades microestruturais, cujas dimensões características se revelam bastante inferiores às dimensões características dos componentes estruturais em que são normalmente inseridos. Se a distribuição das heterogeneidades no seio da matriz se apresenta de uma forma equitativa, a morfologia dessas heterogeneidades pode ser geralmente aproximada pela repetição periódica de uma célula unitária, que representa os detalhes microestruturais do material compósito.

Desde o início do século XIX que a homogeneização de propriedades físicas é conhecida [Poisson 1824, Maxwell 1873, Rayleigh 1892]. Mas é só na segunda metade do século XX que os primeiros trabalhos relativos à teoria matemática da homogeneização se tornaram conhecidos [Spagnolo 1968, Sanchez-Palencia 1970, De Giorgi e Spagnolo 1973]. No caso de se ter presente um material compósito com microestrutura não-periódica podem utilizar-se diversas técnicas de homogeneização: para problemas simétricos e não-periódicos, a convergência-G [Spagnolo 1968], para problemas não-simétricos e não-periódicos, a convergência-H [Murat e Tartar 1997] e para problemas que admitem uma caracterização variacional, a convergência- Γ [Dal Maso 1993]. Contudo estas metodologias não permitem obter dados homogeneizados para as propriedades termomecânicas de um material compósito, mas apenas estimar limites inferiores e superiores para os valores homogeneizados das propriedades efectivas.

Por outro lado, se se tiver um material compósito com uma microestrutura periódica, pode aplicar-se o método de homogeneização por expansão assintótica (HEA) com ganhos significativos na redução do número de graus de liberdade associados à modelação do comportamento termomecânico destas estruturas e com a possibilidade da caracterização dos campos microestruturais. No que concerne à termoelasticidade e decorrendo desta metodologia, é possível obter equações explícitas que permitem a determinação dos níveis microestruturais de fluxo superficial de calor por condução, de tensão e de deformação. Na prática, este processo corresponde ao inverso da homogeneização, o qual se denomina localização. A HEA permite a obtenção de valores médios (homogeneizados) para as propriedades termomecânicas de um determinado material compósito. Esta técnica baseia-se em dois pressupostos: (i) os deslocamentos podem ser caracterizados por uma série assintótica e (ii) as características da microestrutura são definidas na célula unitária, representativa da periodicidade na microescala.

1.2 Objectivos

O objectivo primordial proposto neste trabalho visa o procedimento de um estudo comparativo das propriedades termoelásticas de materiais compósitos obtidas através de procedimentos quer numéricos de homogeneização por expansão assintótica quer analíticos com resultados experimentais de fonte bibliográfica. Para esse efeito o trabalho foi desenvolvido em três fases: i) Efectuou-se uma revisão bibliográfica dos vários modelos de previsão analítica e de resultados experimentais; ii) Utilizando *software* já desenvolvido pelo GRIDS¹, procedeu-se ao estudo do efeito da fracção volúmica de reforço nas propriedades termoelásticas efectivas de materiais compósitos reforçados com partículas esféricas; iii) Compararam-se os resultados numéricos com os analíticos e com os experimentais, e procedeu-se à sua análise global crítica.

¹Grupo de Investigação e Desenvolvimento de *Software* de Simulação.

Capítulo 2

Homogeneização por Expansão Assimptótica em Termoelasticidade

Na homogeneização por expansão assintótica procede-se à substituição de um meio heterogéneo por um meio homogéneo equivalente, o que, com base em dados relativos ao nível microestrutural, possibilita a obtenção de leis de comportamento macroestruturais. Neste contexto, considere-se um material heterogéneo linear termoelástico associado a um meio sólido $\Omega \in \mathbb{R}^3$, cuja microestrutura é constituída pela distribuição espacialmente periódica de uma célula unitária associada a uma região Y , conforme se representa na figura 2.1. Aquando da solicitação termomecânica dos materiais heterogéneos de microestrutura periódica, aparecem oscilações periódicas dos campos resultantes de temperaturas, deslocamentos e fluxos superficiais de calor por condução, tensões ou deformações. A generalidade dos materiais heterogéneos de microestrutura periódica apresenta uma relação ε entre as dimensões características dos domínios da micro- e da macroestrutura reduzida ($\varepsilon \ll 1$). Este tipo de oscilações periódicas advém da periodicidade associada à heterogeneidade microestrutural e manifesta-se na vizinhança de dimensão ε de qualquer ponto de Ω . Desta forma, é natural assumir a existência de duas escalas distintas \mathbf{x} e \mathbf{y} , associadas, respectivamente, aos fenómenos de comportamento do material nos níveis da macroescala Ω e da microescala Y , tal como ilustrado na figura 2.1. Assim, resulta que as variáveis associadas aos campos anteriormente referidos passam a depender funcionalmente de ambos os sistemas \mathbf{x} e \mathbf{y} , em que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon. \quad (2.1)$$

Daqui, obtém-se uma característica formalmente designada por Y -periodicidade, sendo que a dependência funcional em \mathbf{y} é periódica no domínio Y .

Se, por um lado, a Y -periodicidade da heterogeneidade microestrutural reflecte-se, em termos de propriedades lineares termoelásticas, no facto de os tensores de condutividade térmica \mathbf{k} , de expansibilidade térmica $\boldsymbol{\alpha}$ e de elasticidade \mathbf{D} serem Y -periódicos em \mathbf{y} , por outro lado, a homogeneidade do material ao nível da macroescala resulta na não-dependência directa destes tensores relativamente ao sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} . Neste contexto, em termos das componentes dos tensores de condutividade térmica, de

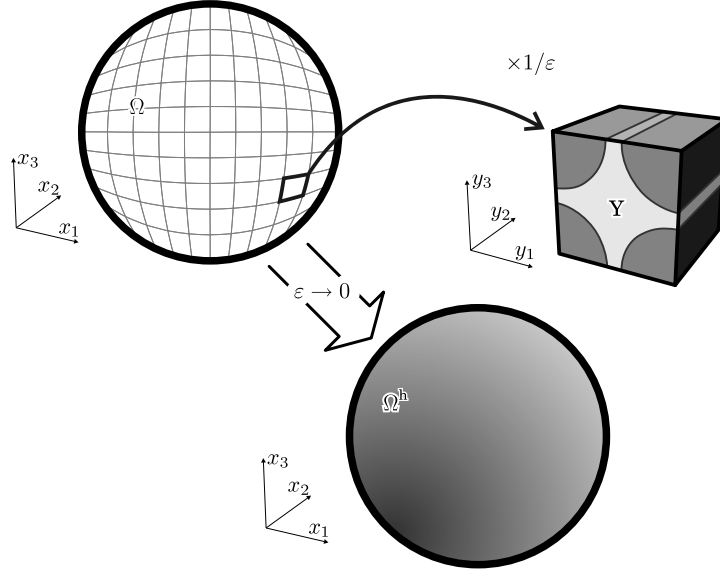


Figura 2.1: Representação esquemática da célula unitária Y associada à microescala e do material termoelástico heterogêneo Ω , utilizados no processo de homogeneização assintótica, de que resulta o material homogêneo Ω^h , com $\varepsilon \rightarrow 0$.

expansibilidade térmica e de elasticidade, obtém-se

$$k_{ij} = k_{ij}(\mathbf{y}), \quad (2.2)$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad (2.3)$$

$$D_{ijkl} = D_{ijkl}(\mathbf{y}), \quad (2.4)$$

respectivamente. Mas, no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} , a heterogeneidade microestrutural manifesta-se num período ε^{-1} vezes menor que a dimensão característica do domínio Y . Sendo assim e de acordo com a equação 2.1, definem-se os tensores

$$k_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) = k_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad (2.5)$$

$$\alpha_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \alpha_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$D_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{x}) = D_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad (2.7)$$

em que o índice superior ε representa o facto de \mathbf{k} , $\boldsymbol{\alpha}$ e \mathbf{D} serem εY -periódicos no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} , dependendo, assim, indirectamente de \mathbf{x} . Considerando a convenção de Einstein para a notação indicial das componentes das grandezas tensoriais, o problema térmico em regime estacionário é descrito por equações de equilíbrio e de Fourier para a condução de calor que correspondem, respectivamente, a [Cioranescu e Donato 1999]

$$\frac{\partial q_i^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad (2.8)$$

$$q_i^\varepsilon = -k_{ij}^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} \quad \text{em } \Omega, \quad (2.9)$$

para $i, j = 1, \dots, 3$. q_i são as componentes do vector de fluxos superficiais de calor por condução. Q representa a taxa temporal de geração de calor por unidade de volume e T é o campo de temperaturas. Uma vez mais, o índice superior ε evidencia a εY -periodicidade de uma determinada variável no sistema de coordenadas da macroescala, \mathbf{x} . Na fronteira Γ de Ω podem ser definidas condições de fronteira de Dirichlet, de Neumann e de Robin que correspondem a

$$T^\varepsilon = \bar{T} \quad \text{em} \quad \Gamma_{D_T}, \quad (2.10)$$

$$q_i^\varepsilon n_i = -\bar{q} \quad \text{em} \quad \Gamma_{N_T} \quad \text{e} \quad (2.11)$$

$$q_i^\varepsilon n_i = h_c(T^\varepsilon - T_\infty) \quad \text{em} \quad \Gamma_{R_T}, \quad (2.12)$$

respectivamente, com $\Gamma_{D_T} \cup \Gamma_{N_T} \cup \Gamma_{R_T} = \Gamma$ e $\Gamma_{D_T} \cap \Gamma_{N_T} = \Gamma_{D_T} \cap \Gamma_{R_T} = \Gamma_{N_T} \cap \Gamma_{R_T} = \emptyset$. \bar{T} e \bar{q} são valores prescritos de temperatura e de fluxo de calor por condução por unidade de área, respectivamente. n_i são as componentes de um versor normal exterior às superfícies Γ_{N_T} ou Γ_{R_T} . h_c e T_∞ são o coeficiente de convecção e a temperatura do meio ambiente, respectivamente.

Por outro lado, o problema associado de termoelasticidade linear é descrito por equações de equilíbrio, relações deformações-deslocamentos linearizadas e relações constitutivas que, assumindo deformações infinitesimais associadas a um processo quase-estático, correspondem a [Cioranescu e Donato 1999]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + f_i = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.13)$$

$$\epsilon_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j^\varepsilon} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i^\varepsilon} \right) \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad (2.14)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = D_{ijkl}^\varepsilon \epsilon_{kl}^\varepsilon - \Delta T^\varepsilon \beta_{ij}^\varepsilon \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.15)$$

respectivamente, em que

$$\Delta T^\varepsilon = T^\varepsilon - T_0 \quad \text{e} \quad (2.16)$$

$$\beta_{ij}^\varepsilon = D_{ijkl}^\varepsilon \alpha_{kl}^\varepsilon = \beta_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon). \quad (2.17)$$

σ_{ij} e ϵ_{ij} são as componentes dos tensores das tensões e das deformações de Cauchy, respectivamente. f_i e u_i representam as componentes dos vectores de forças volúmicas e de deslocamentos, respectivamente. T_0 é a temperatura de referência e β_{ij} são as componentes do tensor dos módulos térmicos. Na fronteira Γ de Ω podem ser também definidas condições de fronteira de Dirichlet e de Neumann que correspondem a

$$u_i^\varepsilon = \bar{u}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_{D_u} \quad \text{e} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \bar{t}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_{N_u}, \quad (2.19)$$

respectivamente, com $\Gamma_{D_u} \cup \Gamma_{N_u} = \Gamma$ e $\Gamma_{D_u} \cap \Gamma_{N_u} = \emptyset$. \bar{u}_i e \bar{t}_i são valores prescritos de deslocamento e de força superficial, respectivamente. n_j são as componentes de um versor normal exterior à superfície Γ_{N_u} .

Assim, com base no pressuposto da existência de duas escalas distintas associadas aos fenómenos de comportamento do material nos níveis da macroescala Ω e da microescala

Y, procede-se à aproximação dos campos de temperaturas e de deslocamentos (variáveis primárias) com base nas respectivas expansões assintóticas em ε :

$$T^\varepsilon(\mathbf{x}) = T^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon T^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 T^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cdots \quad \text{e} \quad (2.20)$$

$$u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_i^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cdots, \quad (2.21)$$

em que os termos $T^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $u_i^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, com $r \in \mathbb{N}_0$, correspondem a funções Y-periódicas em \mathbf{y} , designadas por correctores de ordem r dos campos de temperaturas e de deslocamentos, respectivamente. Atendendo à equação 2.1 tem-se, de acordo com a regra da cadeia utilizada na derivação de funções, que

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x_i^\varepsilon} = \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \cdot}{\partial y_i}. \quad (2.22)$$

Neste contexto, a substituição da expansão assintótica do campo de temperaturas (equação 2.20) nas equações de Fourier para a condução de calor (expressão 2.9) e na lei de Duhamel-Neumann (expressão 2.15), e a substituição da expansão assintótica do campo de deslocamentos (expressão 2.21) nas relações deformações-deslocamentos linearizadas (expressão 2.14) permitem a obtenção do problema termoelástico homogeneizado. Deste modo, o campo de temperaturas $T^{(0)}$ corresponde à solução do problema térmico homogeneizado definido por

$$\frac{\partial \Xi_i}{\partial x_i} - Q = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.23)$$

$$T^{(0)} = \bar{T} \quad \text{em} \quad \Gamma_{\text{DT}}, \quad (2.24)$$

$$\Xi_i n_i = -\bar{q} \quad \text{em} \quad \Gamma_{\text{NT}}, \quad (2.25)$$

$$\Xi_i n_i = h_c \left(T^{(0)} - T_\infty \right) \quad \text{em} \quad \Gamma_{\text{RT}}, \quad \text{com} \quad (2.26)$$

$$\Xi_i = -k_{ij}^h \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.27)$$

em que Ξ_i denota as componentes do campo macroestrutural homogeneizado de fluxos superficiais de calor por condução e k_{ij}^h são as componentes do tensor homogeneizado de condutividade térmica, definidas por

$$k_{ik}^h = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} k_{ij}(\mathbf{y}) \left(\mathbf{I}_j^k - \frac{\partial \Upsilon^k}{\partial y_j} \right) d\mathbf{Y}. \quad (2.28)$$

\mathbf{I}_j^k correspondem, num referencial cartesiano ortonormado, às componentes do tensor identidade de segunda ordem. Υ^k são as componentes do vector do campo de deslocamentos termocaracterísticos [Pinho-da-Cruz 2007]. Por outro lado, o campo de deslocamentos $u_i^{(0)}$ corresponde à solução do problema de termoelasticidade homogeneizado definido por

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.29)$$

$$u_i^{(0)} = \bar{u}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_{\text{Du}}, \quad (2.30)$$

$$\Sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_{\text{Nu}}, \quad \text{com} \quad (2.31)$$

$$\Sigma_{ij} = D_{ijkl}^h \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} - \left(T^{(0)} - T_0 \right) \beta_{ij}^h \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.32)$$

em que Σ_{ij} denota as componentes do campo macroestrutural homogeneizado de tensões. D_{ijkl}^h e β_{ij}^h são as componentes dos tensores homogeneizados de elasticidade e dos módulos térmicos, respectivamente, definidas por

$$D_{ijmn}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl}(\mathbf{y}) \left(I_{kl}^{mn} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \right) dY \quad e \quad (2.33)$$

$$\beta_{ij}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[\beta_{ij}(\mathbf{y}) - D_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_l} \right] dY, \quad (2.34)$$

sendo $I_{kl}^{mn} = \delta_{km} \delta_{ln}$, em que δ_{ij} é o símbolo de delta de Kronecker. χ_k^{mn} e Ψ_k são as componentes dos tensores dos campos de deslocamentos característicos e de deslocamentos termocaracterísticos, respectivamente [Pinho-da-Cruz 2007].

Atenda-se ao facto de que a consideração das duas escalas \mathbf{x} e \mathbf{y} — associadas, respectivamente, aos fenómenos de comportamento do material nos níveis da macroescala Ω e da microescala Y — baseia-se na hipótese de existirem oscilações periódicas dos campos resultantes de temperaturas e de deslocamentos, consequentes da periodicidade associada à heterogeneidade microestrutural. Estas oscilações devem, supostamente, sobrepor-se a campos macroscópicos em que não se toma em consideração, pelo menos de modo directo, a influência de tais heterogeneidades microestruturais. Assim, para uma aproximação de primeira ordem da expansão assintótica do campo de temperaturas ou deslocamentos, as oscilações podem ser interpretadas como flutuações em torno de um valor médio macroscópico, tal como se ilustra na figura 2.2. Em termos práticos, constata-se que uma parte significativa das aplicações estruturais de engenharia baseadas em materiais heterogêneos de microestrutura periódica se encontra associada a valores de $\varepsilon \ll 1$.

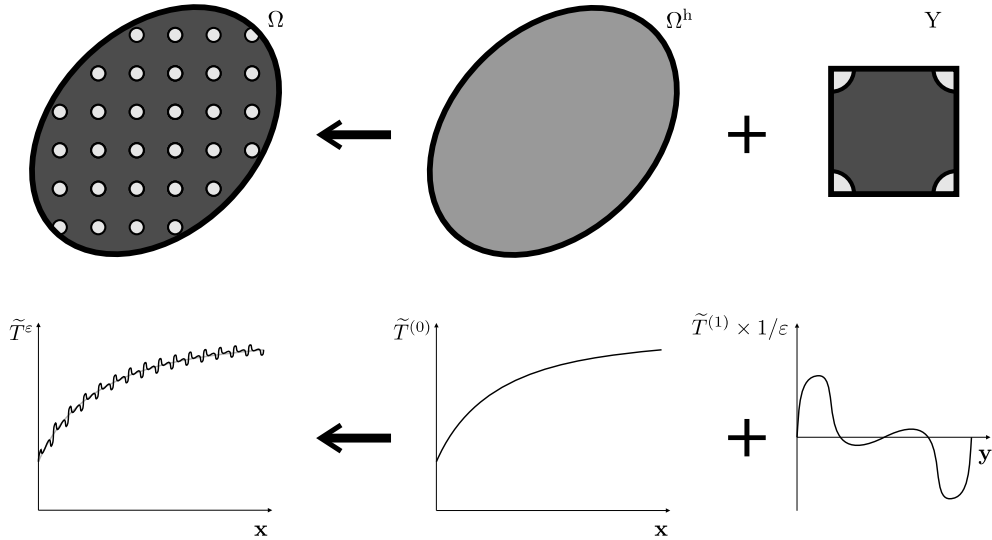


Figura 2.2: Ilustração esquemática da aproximação de primeira ordem da expansão assintótica do campo de temperaturas, para um caso unidimensional — o campo de temperaturas, em Ω , é aproximado pela sobreposição do campo homogeneizado da macroescala, em Ω^h , com as flutuações de primeira ordem oriundas da Y -periodicidade do campo da microescala, em Y .

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 3

Modelos Analíticos de Previsão

3.1 Propriedades Mecânicas de Materiais Compósitos

De um modo geral, verifica-se que as propriedades mecânicas efectivas de materiais compósitos não seguem a regra das misturas [Hashin 1983]. Por conseguinte, é imperativo proceder à criação de modelos que possam prever essas propriedades. Além disso, atendendo ao facto de as constantes elásticas de um material compósito dependerem da forma e da distribuição do material de reforço [Hale 1976, Fan *et al.* 1992], é desejável a definição de limites (analíticos) superiores e inferiores para os valores das propriedades mecânicas efectivas do material compósito, devendo estes limites serem o mais aproximados possível um do outro para que a previsão seja útil e precisa.

A maioria dos modelos teóricos são idealizados a partir do pressuposto de que existe uma ligação perfeita entre as fases constituintes do material, sendo, no entanto, geralmente negligenciada a interacção elástica entre partículas. De um modo geral, estes modelos baseiam-se em simplificações geométricas, de modo a se obterem expressões analíticas.

No presente trabalho efectua-se uma comparação entre os resultados da previsão numérica do módulo de elasticidade longitudinal do material compósito e os resultados de previsão analítica. Por um lado a previsão analítica do módulo de elasticidade é efectuada de acordo com as equações de Halpin-Tsai [Halpin e Kardos 1976]. Considerando,

$$\xi_1 = \frac{2(1 - 2\nu_m)}{1 + \nu_m}, \quad (3.1)$$

$$\eta_1 = \frac{\kappa_r - \kappa_m}{\kappa_r + \xi_1 E_m}, \quad (3.2)$$

$$\xi_2 = \frac{7 - 5\nu_m}{8 - 10\nu_m} \text{ e} \quad (3.3)$$

$$\eta_2 = \frac{G_r - G_m}{G_r + \xi_2 E_m}, \quad (3.4)$$

podem ser obtidos os módulos de incompressibilidade e de corte (κ e G respectivamente),

$$\kappa = \kappa_m \frac{1 + \xi_1 \eta_1 f_r}{1 - \eta_1 f_r} \text{ e} \quad (3.5)$$

$$G = G_m \frac{1 + \xi_2 \eta_2 f_r}{1 - \eta_2 f_r}, \quad (3.6)$$

em que f_r é a fracção volúmica do reforço. Atendendo às relações

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad (3.7)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.8)$$

resulta que o módulo de elasticidade transversal corresponde a

$$E = \frac{9\kappa G}{3\kappa + G}. \quad (3.9)$$

No que concerne ao coeficiente de Poisson do material compósito, o seu valor pode ser obtido analiticamente com base nas equações anteriores de Halpin-Tsai, a que corresponde

$$\nu = \frac{3\kappa - 2G}{6\kappa + 2G}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, foram ainda considerados os limites superior e inferior associados aos modelos micromecânicos de Voigt-Reuss [Voigt 1889, Reuss 1929], de Hashin-Shtrikman [Hashin e Shtrikman 1963] e de Ravichandran [Ravichandran 1994].

A célula representativa unitária associada ao modelo de Voigt-Reuss pode sofrer dois tipos distintos de carregamento mecânico. Por um lado, considere-se um carregamento mecânico segundo a direcção paralela à interface das lâminas da matriz e do reforço. Deste modo, assumindo um estado de isodeformação, ou seja, um campo uniforme de deformação para a matriz e o reforço, e procedendo à minimização da energia potencial do material compósito, o módulo de elasticidade longitudinal do material compósito corresponde, segundo [Voigt 1889], a

$$E^V = E_r f_r + E_m (1 - f_r). \quad (3.11)$$

Por outro lado, considerando que o material compósito está sob um estado de isotensão, ou seja, o carregamento mecânico da célula representativa unitária é perpendicular à interface das lâminas da matriz e do reforço, o módulo de elasticidade longitudinal corresponde, de acordo com [Reuss 1929], a

$$E^R = \frac{E_r E_m}{(1 - f_r) E_r + f_r E_m}. \quad (3.12)$$

Estas equações correspondem ao limite superior de Voigt e ao limite inferior de Reuss, respectivamente, para o valor do módulo de elasticidade de um material compósito. No entanto, conforme referido por [Hill 1963], nem a suposição de estados de isodeformação nem de isotensão representam condições reais. De facto, as tracções na interface das lâminas da matriz e do reforço não estão em equilíbrio, segundo o modelo de Voigt, e a interface das lâminas da matriz e do reforço não se consegue manter, segundo o modelo de Reuss. Convém referir que não é aconselhável calcular os coeficientes de Poisson sob estados de isotensão ou de isodeformação [Hsieh e Tuan 2005]. De um modo geral, se os valores da rigidez dos materiais da matriz e do reforço forem muito diferentes, os limites de Voigt e Reuss definem intervalos muito amplos. Ao contrário de Voigt e Reuss, Hashin e Shtrikman (HS) consideram o material compósito como uma fase de partículas aleatoriamente distribuídas e uma fase contínua — a matriz. O modelo micromecânico de Hashin-Shtrikman requer a consideração de um único princípio variacional, com base

num material de referência, providenciando limites para as constantes elásticas de um material compósito [Hashin e Shtrikman 1962, Hashin e Shtrikman 1963]. Com base no caso de um material compósito ser constituído por um material de reforço mais rígido que o material da matriz, podem retirar-se os limites superior (s) e inferior (i) dos módulos de incompressibilidade e de corte (k e G respectivamente),

$$\kappa_s^{\text{HS}} = \kappa_r + \frac{1 - f_r}{\frac{1}{\kappa_m - \kappa_r} + \frac{3f_r}{3\kappa_r + 4G_r}}, \quad (3.13)$$

$$\kappa_i^{\text{HS}} = \kappa_m + \frac{f_r}{\frac{1}{\kappa_r - \kappa_m} + \frac{3(1-f_r)}{3\kappa_m + 4G_m}}, \quad (3.14)$$

$$G_s^{\text{HS}} = G_r + \frac{1 - f_r}{\frac{1}{G_m - G_r} + \frac{6f_r(\kappa_r + 2G_r)}{5G_r(3\kappa_r + 4G_r)}} \quad \text{e} \quad (3.15)$$

$$G_i^{\text{HS}} = G_m + \frac{f_r}{\frac{1}{G_r - G_m} + \frac{6(1-f_r)(\kappa_m + 2G_m)}{5G_m(3\kappa_m + 4G_m)}}. \quad (3.16)$$

Atendendo às equações 3.7 a 3.9, podem então obter-se o limite superior e o limite inferior de Hashin-Shtrikman para o módulo de elasticidade longitudinal, que correspondem, respectivamente, a

$$E_s^{\text{HS}} = \frac{9\kappa_s^{\text{HS}}G_s^{\text{HS}}}{3\kappa_s^{\text{HS}} + G_s^{\text{HS}}} \quad \text{e} \quad (3.17)$$

$$E_i^{\text{HS}} = \frac{9\kappa_i^{\text{HS}}G_i^{\text{HS}}}{3\kappa_i^{\text{HS}} + G_i^{\text{HS}}}. \quad (3.18)$$

Para a obtenção do limite superior e do limite inferior para o valor do coeficiente de Poisson, Zimmerman [Zimmerman 1992] propôs modificações simplificadoras no seu cálculo, surgindo assim

$$\nu_s^{\text{HS}} = \frac{3\kappa_s^{\text{HS}} - 2G_i^{\text{HS}}}{6\kappa_s^{\text{HS}} + 2G_i^{\text{HS}}} \quad \text{e} \quad (3.19)$$

$$\nu_i^{\text{HS}} = \frac{3\kappa_i^{\text{HS}} - 2G_s^{\text{HS}}}{6\kappa_i^{\text{HS}} + 2G_s^{\text{HS}}}, \quad (3.20)$$

respectivamente. Ravichandran modificou a célula unitária associada aos estados de iso-deformação e de isotensão, propondo uma célula representativa unitária composta por uma matriz contínua e partículas de reforço cúbicas [Ravichandran 1994]. Neste modelo é aplicado um carregamento unidimensional perpendicular a duas faces opostas da célula representativa unitária. Ravichandran sugeriu então que o limite superior e o limite inferior para o módulo de elasticidade longitudinal fossem determinados por

$$E_s^{\text{Ra}} = \frac{\left[E_r E_m + E_m^2 (1 + C_r)^2 - E_m^2 \right] (1 + C_r)}{(E_r - E_m) C_r + E_m (1 + C_r)^3} \quad \text{e} \quad (3.21)$$

$$E_i^{\text{Ra}} = \frac{(C_r E_r E_m + E_m^2) (1 + C_r)^2 - E_m^2 + E_r E_m}{(C_r E_r + E_m) (1 + C_r)^2}, \quad (3.22)$$

em que

$$C_r = f_r^{-\frac{1}{3}} - 1. \quad (3.23)$$

Os limites superior e inferior para o valor do coeficiente de Poisson correspondem a [Hsieh e Tuan 2005]

$$\nu_s^{\text{Ra}} = \frac{\nu_r E_m + C_r \nu_m E_r + E_m \nu_m (2C_r + 3C_r^2 + C_r^3)}{C_r E_r + E_m (1 + 2C_r + 3C_r^2 + C_r^3)} \quad e \quad (3.24)$$

$$\nu_i^{\text{Ra}} = \frac{1}{(1 + C_r)^2} \left[\frac{\nu_r E_m + C_r \nu_m E_r}{C_r E_r + E_m} + \nu_m (1 + C_r)^2 - \nu_m \right]. \quad (3.25)$$

3.2 Propriedades Termoelásticas de Materiais Compósitos

O coeficiente de expansibilidade térmica de um material compósito depende fortemente das suas características microestruturais [Hsieh e Tuan 2007]. Quando um material compósito é sujeito a uma diferença de temperatura geram-se deformações. A deformação de uma das fases num material compósito é restringida pela rigidez da outra fase, dependendo a magnitude dessa deformação da transferência de corte na interface da matriz-reforço. A expressão mais simples para determinar o coeficiente de expansibilidade térmica de um material compósito é dada pela regra das misturas [Hsieh e Tuan 2007]

$$\alpha^{\text{RM}} = \alpha_m (1 - f_r) + \alpha_r f_r. \quad (3.26)$$

Turner foi o primeiro a considerar o módulo de elasticidade na equação para determinar o coeficiente de expansibilidade térmica [Turner 1946], tendo a forma do reforço sido mais tarde considerada por Kerner [Kerner 1956]. Kerner assume que o material compósito é reforçado por partículas esféricas embebidas numa camada uniforme de material da matriz. O coeficiente de expansibilidade térmica, α^K , corresponde, de acordo com Kerner, a

$$\alpha^K = \alpha_m (1 - f_r) + \alpha_r f_r + (1 - f_r) f_r (\alpha_r - \alpha_m) \frac{\kappa_r - \kappa_m}{(1 - f_r) \kappa_m + f_r \kappa_r + \frac{3\kappa_m \kappa_r}{4G_m}}, \quad (3.27)$$

sendo κ_r e κ_m os módulos de incompressibilidade dos materiais do reforço e da matriz, respectivamente, e G_m o módulo de corte do material da matriz.

Schapery [Schapery 1968] também considerou o material de reforço como sendo constituído por partículas esféricas, mas utilizando unicamente os módulos de incompressibilidade da matriz e do reforço, obteve para o coeficiente de expansibilidade térmica do material compósito

$$\alpha^S = \alpha_r + (\alpha_m - \alpha_r) \frac{\kappa_r^{-1} - \kappa_m^{-1}}{\kappa_m^{-1} - \kappa_r^{-1}}. \quad (3.28)$$

Não sendo o módulo de incompressibilidade do material compósito conhecido antecipadamente, a consideração dos limites de Hashin-Shtrikman, equações 3.13 e 3.14, permitem a obtenção de limites superior e inferior para o coeficiente de expansibilidade térmica que, segundo Schapery, correspondem, respectivamente, a

$$\alpha_s^S = \alpha_r + (\alpha_m - \alpha_r) \frac{(\kappa_i^{\text{HS}})^{-1} - \kappa_r^{-1}}{\kappa_m^{-1} - \kappa_r^{-1}} \quad e \quad (3.29)$$

$$\alpha_i^S = \alpha_r + (\alpha_m - \alpha_r) \frac{(\kappa_s^{\text{HS}})^{-1} - \kappa_r^{-1}}{\kappa_m^{-1} - \kappa_r^{-1}}. \quad (3.30)$$

Por outro lado, no modelo apresentado por Fahmy e Ragai [Fahmy e Ragai 1970] estabelece-se uma expressão para o coeficiente de expansibilidade térmica em função dos módulos de elasticidade longitudinal e dos coeficientes de Poisson de cada uma das duas fases constituintes do material compósito:

$$\alpha^{\text{FR}} = \alpha_{\text{m}} - \frac{3f_{\text{r}}(1 - \nu_{\text{m}})(\alpha_{\text{m}} - \alpha_{\text{r}})}{\frac{2E_{\text{m}}}{E_{\text{r}}}(1 - 2\nu_{\text{r}})(1 - f_{\text{r}}) + 2f_{\text{r}}(1 - 2\nu_{\text{m}}) + 1 + \nu_{\text{m}}}. \quad (3.31)$$

Neste trabalho são utilizados os modelos de Kerner, de Schapery e de Fahmy e Ragai para a obtenção dos valores da previsão analítica do coeficiente de expansibilidade térmica de um material compósito.

3.3 Propriedades Térmicas de Materiais Compósitos

A condutividade térmica é uma propriedade bastante importante num material, principalmente em materiais de engenharia utilizados em processos que envolvam diferenças de temperatura elevadas.

Para a obtenção dos valores da previsão analítica do coeficiente de condutividade térmica de um material compósito são utilizados os modelos de Maxwell [Maxwell 1873], de Rayleigh [Rayleigh 1892] e de Landauer [Landauer 1952].

O modelo de Maxwell baseia-se no princípio de que uma partícula de reforço esférica se encontra embebida numa camada uniforme de material da matriz e negligencia-se qualquer interacção entre os campos térmicos associados a várias partículas de reforço. Desta forma Maxwell apresentou uma expressão para determinar o coeficiente de condutividade térmica, k^{M} , correspondente a

$$k^{\text{M}} = k_{\text{m}} \frac{k_{\text{r}} + 2k_{\text{m}} + 2f_{\text{r}}(k_{\text{r}} - k_{\text{m}})}{k_{\text{r}} + 2k_{\text{m}} - f_{\text{r}}(k_{\text{r}} - k_{\text{m}})}. \quad (3.32)$$

Maxwell foi o primeiro a estudar o coeficiente de condutividade térmica de materiais heterogéneos, mas não considerou o efeito de dispersão e da formação em cadeia. Com efeito, o seu modelo tem tendência a prever baixos valores do coeficiente de condutividade térmica para elevadas concentrações de fracção volúmica de partículas de reforço [Cai *et al.* 2005].

No modelo de Rayleigh, os pressupostos do modelo anterior mantêm-se, mas neste caso é considerado um arranjo periódico cúbico de partículas esféricas com o mesmo diâmetro, que definem o material compósito. A expressão para o cálculo do coeficiente de condutividade térmica, k^{R} , é, segundo Rayleigh, idêntica à de Maxwell, correspondendo a

$$k^{\text{R}} = k_{\text{m}} \frac{k_{\text{r}} + k_{\text{m}} + f_{\text{r}}(k_{\text{r}} - k_{\text{m}})}{k_{\text{r}} + k_{\text{m}} + f_{\text{r}}(k_{\text{m}} - k_{\text{r}})}. \quad (3.33)$$

Landauer, por sua vez, considerou o efeito quer da distribuição das fases constituintes do material compósito quer dos contactos que se podem estabelecer entre as partículas de reforço. Estabeleceu, assim, uma expressão para determinar o coeficiente de condutividade térmica de um material compósito com reforço de partículas esféricas, correspondente a

$$k^{\text{L}} = \frac{1}{4} \left[k_{\text{r}}(3f_{\text{r}} - 1) + k_{\text{m}}(2 - 3f_{\text{r}}) + \sqrt{[k_{\text{r}}(3f_{\text{r}} - 1) + k_{\text{m}}(2 - 3f_{\text{r}})]^2 + 8k_{\text{r}}k_{\text{m}}} \right]. \quad (3.34)$$

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 4

Procedimentos Numéricos

No presente trabalho utilizou-se o programa COMMA3D [Pinho-da-Cruz 2007]. Este é um programa de simulação numérica baseado no método dos elementos finitos, desenvolvido em Fortran 90, que constitui a base de uma plataforma de modelação numérica do comportamento termomecânico de materiais compósitos e inclui o procedimento de homogeneização por expansão assintótica em termoelasticidade linear. Este programa permite a modelação de domínios sólidos utilizando elementos finitos tetraédricos e hexaédricos, quer lineares quer quadráticos.

As tarefas de pré- e pós-processamento foram realizadas com base na utilização do programa GiD[®]. Este programa é uma interface gráfica de modelação geométrica, com várias características que o tornam útil nas fases de pré- e pós-processamento de problemas de simulação numérica.

A modelação numérica de células representativas unitárias de materiais compósitos com geometrias complexas foi efectuada com base no código de elementos finitos SPHERECELL [Oliveira *et al.* 2004, Oliveira 2006]. Este programa permite o controlo rigoroso de alguns parâmetros geométricos, tais como, por exemplo, (i) a fracção volúmica dos materiais constituintes, (ii) a geometria e as dimensões do reforço, (iii) a distribuição do reforço e (iv) as condições de fronteira de periodicidade.

No contexto da aplicação do método de homogeneização por expansão assintótica à termoelasticidade, é necessário garantir a periodicidade não só da geometria das células representativas unitárias mas também dos campos dos deslocamentos característicos e dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, no problema termoelástico, e do campo de deslocamentos termocaracterísticos, no problema térmico. Neste contexto, foi utilizada a sub-rotina SLAVERY [Oliveira *et al.* 2004, Oliveira 2006] para se proceder, de modo expedito, à associação dos nós sujeitos a condições de periodicidade, bem como dos seus correspondentes graus de liberdade.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 5

Propriedades dos Materiais

Neste trabalho são analisados nove tipos distintos de materiais compósitos reforçados com partículas esféricas. Estes materiais compósitos envolvem treze materiais distintos, de natureza cerâmica, metálica ou polimérica. As suas propriedades elásticas, termoelásticas e térmicas são seguidamente apresentadas. Assim, para os materiais considerados neste estudo são apresentados, nas tabelas 5.1 e 5.2, os valores adoptados para o módulo de elasticidade, E , e o coeficiente de Poisson, ν , respectivamente. Os valores do coeficiente de expansibilidade térmica, α , e do coeficiente de condutividade térmica, k , são apresentados nas tabelas 5.3 e 5.4, respectivamente.

Tabela 5.1: Módulos de elasticidade, E , para os materiais considerados.

Material	Valor [GPa]	Referência
Alumina (Al_2O_3)	401	[Hsieh e Tuan 2007]
Carboneto de Tungsténio (WC)	661	[Hsieh e Tuan 2006]
Cobalto (Co)	207	[Hsieh e Tuan 2006]
Cobre (Cu)	124	[Hsieh e Tuan 2006]
Diamante (C)	1000	[Hsieh e Tuan 2006]
Estanho (Sn)	49,9	[Kaye e Laby 1989]
Grafite (C)	1,153	[Cho <i>et al.</i> 2007]
Nitrato de Alumínio (NiAl)	186	[Hsieh e Tuan 2007]
Polietileno de Alta Densidade	1,07	[Moysey e Thompson 2007]
Politetrafluoroetileno	1,5	[Rae e Dattelbaum 2004]
Resina Epóxida	3,5	[Hsieh e Tuan 2006]
Sílica (SiO_2)	74	[Qu e Wong 2002]
Vidro Borossilicato	78	[Pinho-da-Cruz 2007]

Tabela 5.2: Coeficientes de Poisson, ν , para os materiais considerados.

Material	Valor [-]	Referência
Alumina (Al_2O_3)	0,24	[Hsieh e Tuan 2007]
Carboneto de Tungstênio (WC)	0,19	[Hsieh e Tuan 2006]
Cobalto (Co)	0,31	[Hsieh e Tuan 2006]
Cobre (Cu)	0,34	[Hsieh e Tuan 2006]
Diamante (C)	0,20	[Hsieh e Tuan 2006]
Estanho (Sn)	0,357	[Kaye e Laby 1989]
Grafite (C)	0,195	[Cho <i>et al.</i> 2007]
Nitrato de Alumínio (NiAl)	0,31	[Hsieh e Tuan 2007]
Polietileno de Alta Densidade	0,46	[Moysey e Thompson 2007]
Politetrafluoroetileno	0,41	[Rae e Dattelbaum 2004]
Resina Epóxida	0,35	[Hsieh e Tuan 2006]
Sílica (SiO_2)	0,19	[Qu e Wong 2002]
Vidro Borossilicato	0,21	[Pinho-da-Cruz 2007]

Tabela 5.3: Coeficientes de expansibilidade térmica, α , para os materiais considerados.

Material	α [MK^{-1}]	Referência
Alumina (Al_2O_3)	7,3	[Hsieh e Tuan 2007]
Carboneto de Tungstênio (WC)	5,2	[Hsieh e Tuan 2006]
Cobalto (Co)	14	[Hsieh e Tuan 2006]
Cobre (Cu)	19	[Hsieh e Tuan 2006]
Diamante (C)	2,2	[Hsieh e Tuan 2006]
Estanho (Sn)	22	[Kaye e Laby 1989]
Grafite (C)	7,9	[Sanchez-Coronado e Chung 2003]
Nitrato de Alumínio (NiAl)	14	[Hsieh e Tuan 2007]
Polietileno de Alta Densidade	210	[Mark 1999]
Politetrafluoroetileno	109	[Huang <i>et al.</i> 2006]
Resina Epóxida	65,26	[Sideridis <i>et al.</i> 2005]
Sílica (SiO_2)	0,5	[Qu e Wong 2002]
Vidro Borossilicato	6,5	[Pinho-da-Cruz 2007]

Tabela 5.4: Coeficientes de condutividade térmica, k , para os materiais considerados.

Material	k [W/mK]	Referência
Alumina (Al_2O_3)	34	[Pinho-da-Cruz 2007]
Carboneto de Tungstênio (WC)	84,02	[Kaye e Laby 1989]
Cobalto (Co)	69,21	[Kaye e Laby 1989]
Cobre (Cu)	400	[Pinho-da-Cruz 2007]
Diamante (C)	2000	[Pinho-da-Cruz 2007]
Estanho (Sn)	64	[Kumrlutas e Tavman 2006]
Grafite (C)	135	[Cai <i>et al.</i> 2005]
Nitrato de Alumínio (NiAl)	92	[Terada <i>et al.</i> 1995]
Polietileno de Alta Densidade	0,545	[Tavman 2003]
Politetrafluoroetileno	0,28	[Cai <i>et al.</i> 2005]
Resina Epóxida	0,195	[Lim 2001]
Sílica (SiO_2)	1,5	[Qu e Wong 2002]
Vidro Borossilicato	1,4	[Pinho-da-Cruz 2007]

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Capítulo 6

Apresentação e Discussão de Resultados

6.1 Células Representativas Unitárias

As propriedades elásticas, termoelásticas e térmicas (homogeneizadas) de cada um dos materiais compósitos considerados são determinadas para fracções volúmicas de reforço, f_r , entre 10% e 50%, inclusive. Neste contexto, procedeu-se à geração de cinco células representativas unitárias para as cinco fracções volúmicas de reforço consideradas. As geometrias das células representativas unitárias geradas encontram-se ilustradas na figura 6.1. Em seguida, com base em estudos de convergência quer das matrizes \mathbf{D}^h e \mathbf{k}^h quer dos vectores dos módulos térmicos β^h associados a cada uma das células representativas unitárias que definem o material compósito reforçado com partículas esféricas [Pinho-da-Cruz 2007], foram obtidas as malhas de elementos finitos apresentadas na figura 6.2.

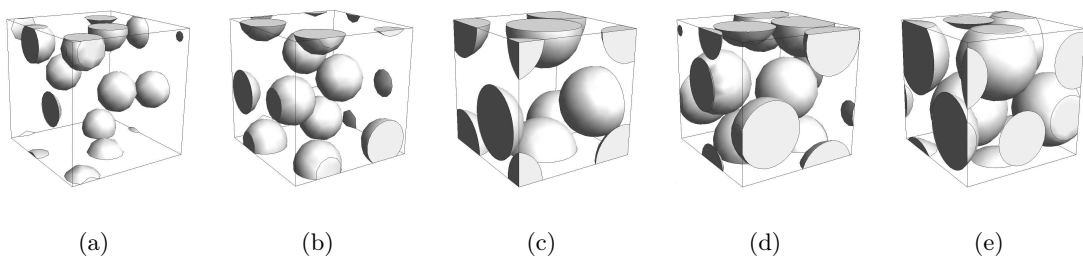


Figura 6.1: Geometrias das células representativas unitárias geradas com partículas esféricas, para fracções volúmicas de reforço de (a) 10%, (b) 20%, (c) 30%, (d) 40% e (e) 50%.

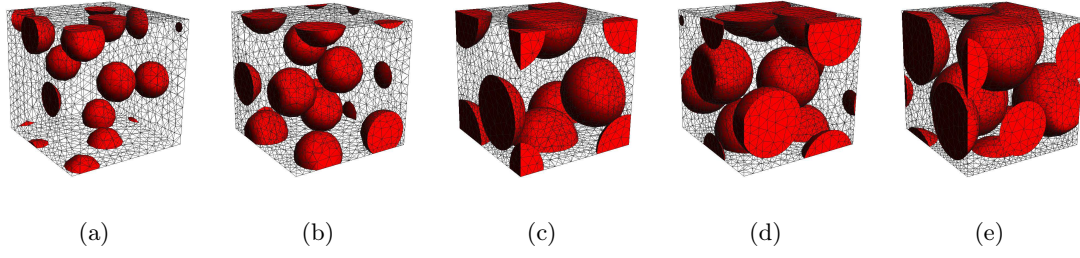


Figura 6.2: Malhas de elementos finitos obtidas com base em estudos de convergência, para as células representativas unitárias com frações volúmicas de reforço de (a) 10%, (b) 20%, (c) 30%, (d) 40% e (e) 50%.

6.2 Propriedades Elásticas de Materiais Compósitos

6.2.1 Material compósito de resina epóxida reforçado com fibra de vidro

Na figura 6.3 são apresentadas as componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida com 10% a 50% de fração volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro.

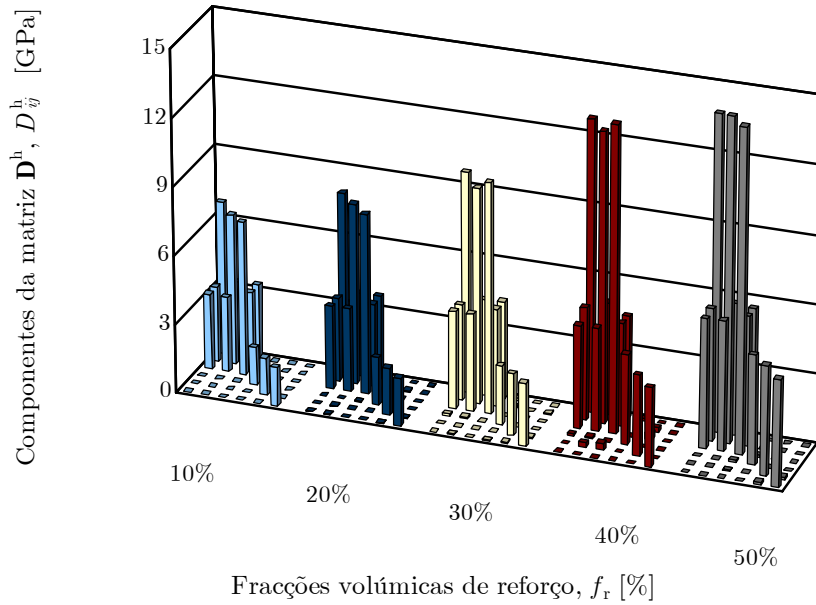


Figura 6.3: Componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida com 10% a 50% de fração volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro.

Verifica-se que para as frações volúmicas de reforço de 10% e 20% o material pode caracterizar-se como sendo cúbico, ou seja, apresenta as mesmas propriedades mecânicas

segundo as três direcções de ortotropia. Isto significa que o comportamento mecânico do material compósito é descrito pelos parâmetros independentes E , ν e G . Para fracções volúmicas de reforço superiores a 30%, inclusive, as matrizes constitutivas apresentam um carácter nitidamente ortotrópico, embora não cúbico.

Na figura 6.4 são ilustrados os resultados de previsão numérica, em conjunto com os de previsão analítica, os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, assim como os resultados experimentais [Hsieh e Tuan 2006], para o módulo de elasticidade longitudinal, considerando uma gama de fracções volúmicas de reforço até 30%.

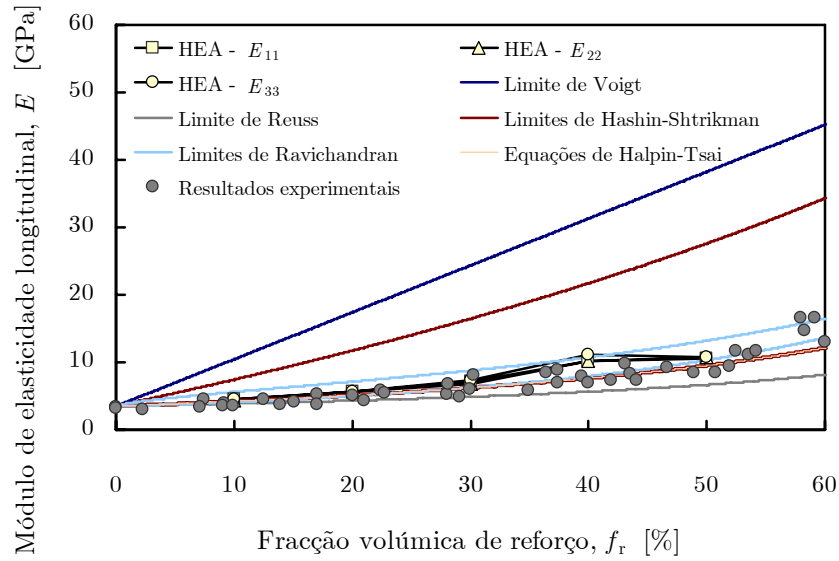


Figura 6.4: Variação do módulo de elasticidade longitudinal com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro, para um material compósito de matriz de resina epóxida.

Constata-se que os resultados experimentais se encontram limitados superiormente pelo limite de Voigt, que por sua vez vai alargando a sua diferença em relação ao limite de Reuss. Este facto pode ser explicado pela grande diferença existente entre os módulos de elasticidade dos materiais constituintes do material compósito. Como seria de esperar, os limites de Hashin-Shtrikman revelam-se bastante estreitos e os de Ravichandran ainda mais, o que se deve ao facto de estes modelos micromecânicos considerarem uma matriz contínua a envolver as partículas isoladas de reforço. Grande parte dos resultados experimentais apresentam-se fora dos limites de Ravichandran, apesar de seguirem uma tendência em conformidade com os mesmos. Os resultados de previsão analítica coincidem com o limite inferior de Hashin-Shtrikman. No que concerne aos resultados numéricos, são apresentados os três módulos de elasticidade longitudinal, devido ao carácter ortotrópico do material compósito.

Na figura 6.5 apresenta-se a globalidade dos resultados experimentais, em conjunto com os resultados de previsão analítica e os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para o módulo de elasticidade longitudinal.

Constata-se que para as fracções volúmicas de reforço mais elevadas os resultados experimentais seguem, em termos de curva média, a mesma tendência dos resultados de previsão analítica.

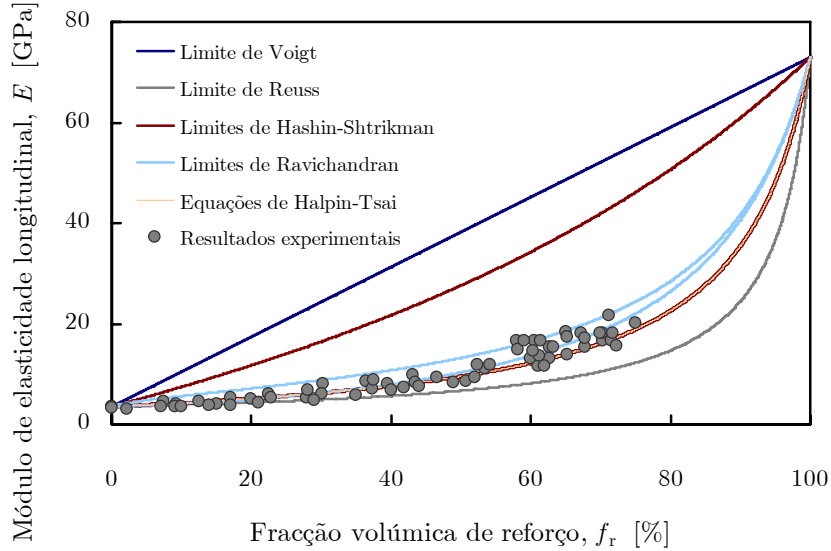


Figura 6.5: Resultados experimentais e de previsão analítica, com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para o módulo de elasticidade longitudinal de um material compósito de resina epóxida com partículas esféricas de fibra de vidro.

Os resultados numéricos do coeficiente de Poisson do material compósito considerado são apresentados na figura 6.6, em conjunto com os resultados de previsão analítica e os experimentais [Hsieh e Tuan 2006], bem como os limites superiores e inferiores de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran. Verifica-se que, apesar de apresentarem grandes variações, os resultados experimentais se encontram dentro dos limites de Hashin-Shtrikman. Por outro lado, os limites de Ravichandran definem um intervalo bastante estreito e tanto os resultados de previsão numérica como os experimentais saem fora desse intervalo.

Por fim, nas figuras 6.7 e 6.8 apresentam-se, respectivamente, os deslocamentos característicos, χ , e os vectores das solicitações mecânicas características, \mathbf{F}^D , da célula representativa unitária de material compósito de resina epóxida com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro (*vd.* figura 6.1c).

6.2.2 Material compósito de nitrato de alumínio reforçado com alumina

Seguidamente, são apresentados os resultados obtidos para o material compósito constituído por nitrato de alumínio (NiAl), como material da matriz, e partículas esféricas de alumina (Al_2O_3), como material de reforço. Na figura 6.9 são apresentadas as componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de nitrato de alumínio com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.

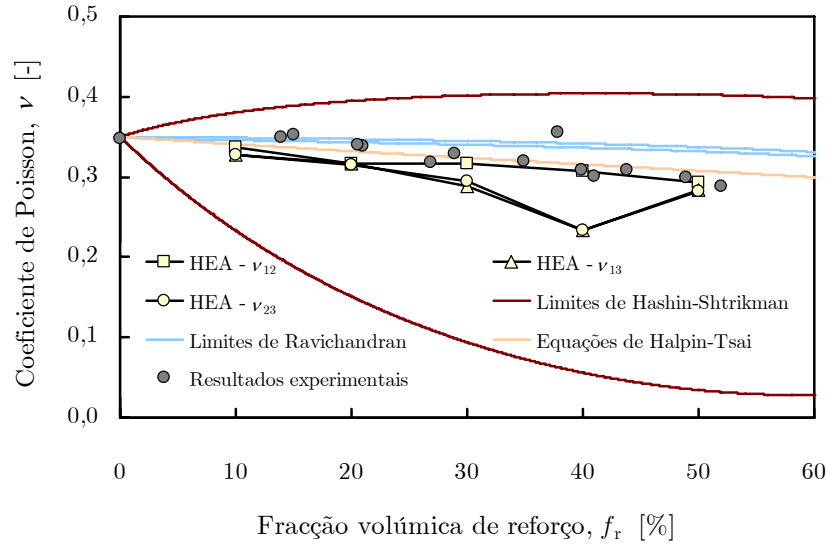


Figura 6.6: Variação do coeficiente de Poisson com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de fibra de vidro, para um material compósito de matriz de resina epóxida.

Uma vez mais, constata-se que para fracções volúmicas de reforço mais baixas o material caracteriza-se como sendo cúbico e para fracções volúmicas de reforço mais elevadas como ortotrópico.

Na figura 6.10 apresentam-se os resultados de previsão numérica e de previsão analítica para o módulo de elasticidade longitudinal, em conjunto com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman, de Ravichandran e os resultados experimentais [Hsieh e Tuan 2005] do material compósito. Observa-se que valores dos resultados experimentais seguem, em geral, a tendência dos resultados analíticos (equações de Halpin-Tsai) e encontram-se dentro dos intervalos dos limites inferiores e superiores tanto de Voigt-Reuss como de Hashin-Shtrikman, exceptuando para o valor de fracção volúmica de reforço de 50%. Por outro lado, os limites de Voigt-Reuss formam um intervalo mais estreito, ajustando-se aos resultados experimentais, o que pode ser explicado pelo facto de os módulos de elasticidade do material da matriz e do reforço terem valores aproximados [Hsieh e Tuan 2005].

Os resultados experimentais e os resultados de previsão analítica, com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para o módulo de elasticidade longitudinal, são apresentados na figura 6.11. Verifica-se que os limites de Ravichandran são bastante apertados. No entanto, estes limites falham usualmente na descrição do módulo de elasticidade da maioria dos compósitos metal-cerâmico, o que sugere que o modelo micromecânico de Ravichandran é sensível ao tipo de microestrutura [Hsieh e Tuan 2005]. Refira-se que o compósito considerado apresenta, para fracções volúmicas de reforço entre os 30% e os 70%, fases morfologicamente contínuas, resultando numa microestrutura interpenetrante.

Os resultados experimentais do coeficiente de Poisson, em conjunto com os resultados numéricos, os resultados de previsão analítica de Halpin-Tsai e os limites superiores e

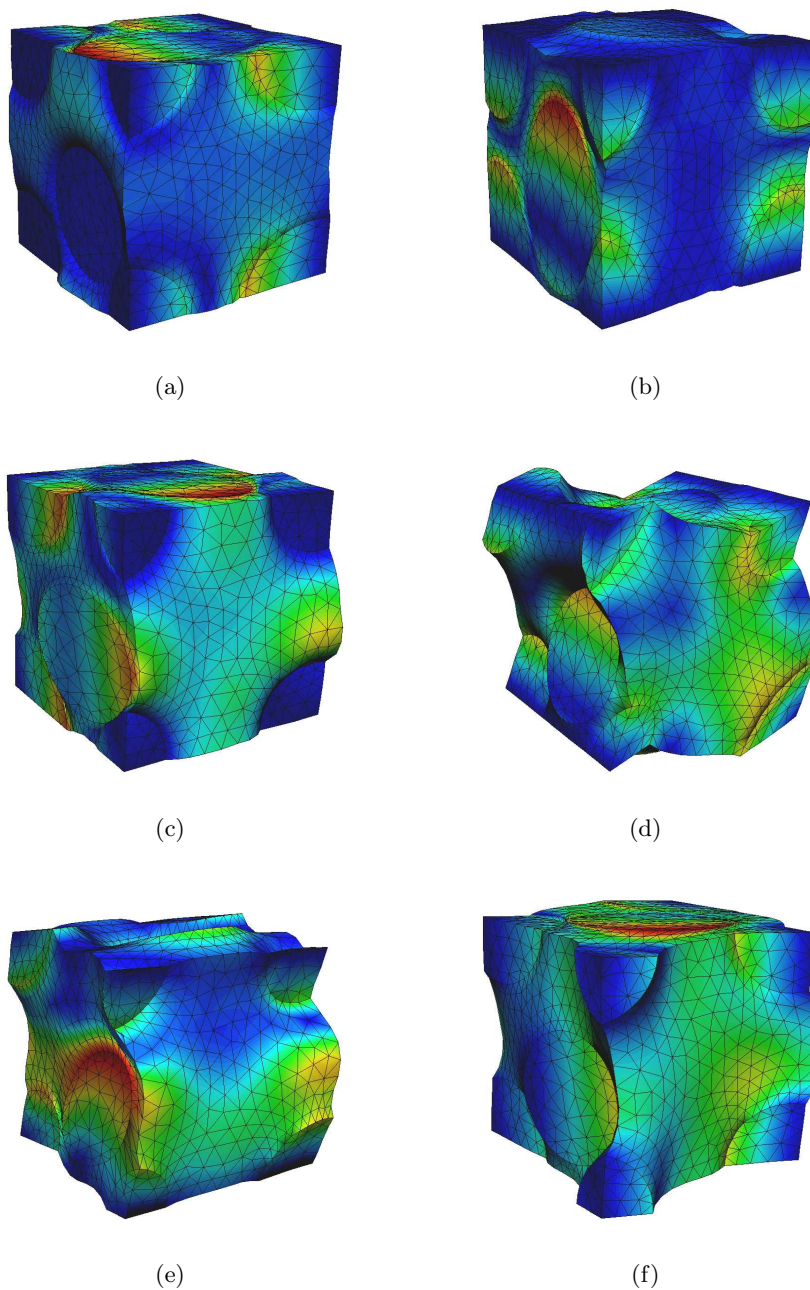


Figura 6.7: Deslocamentos característicos da célula representativa unitária de material compósito de resina epóxida com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro — modos normais (a) χ_{11} , (b) χ_{22} e (c) χ_{33} , e modos de corte (d) χ_{12} , (e) χ_{23} e (f) χ_{13} .

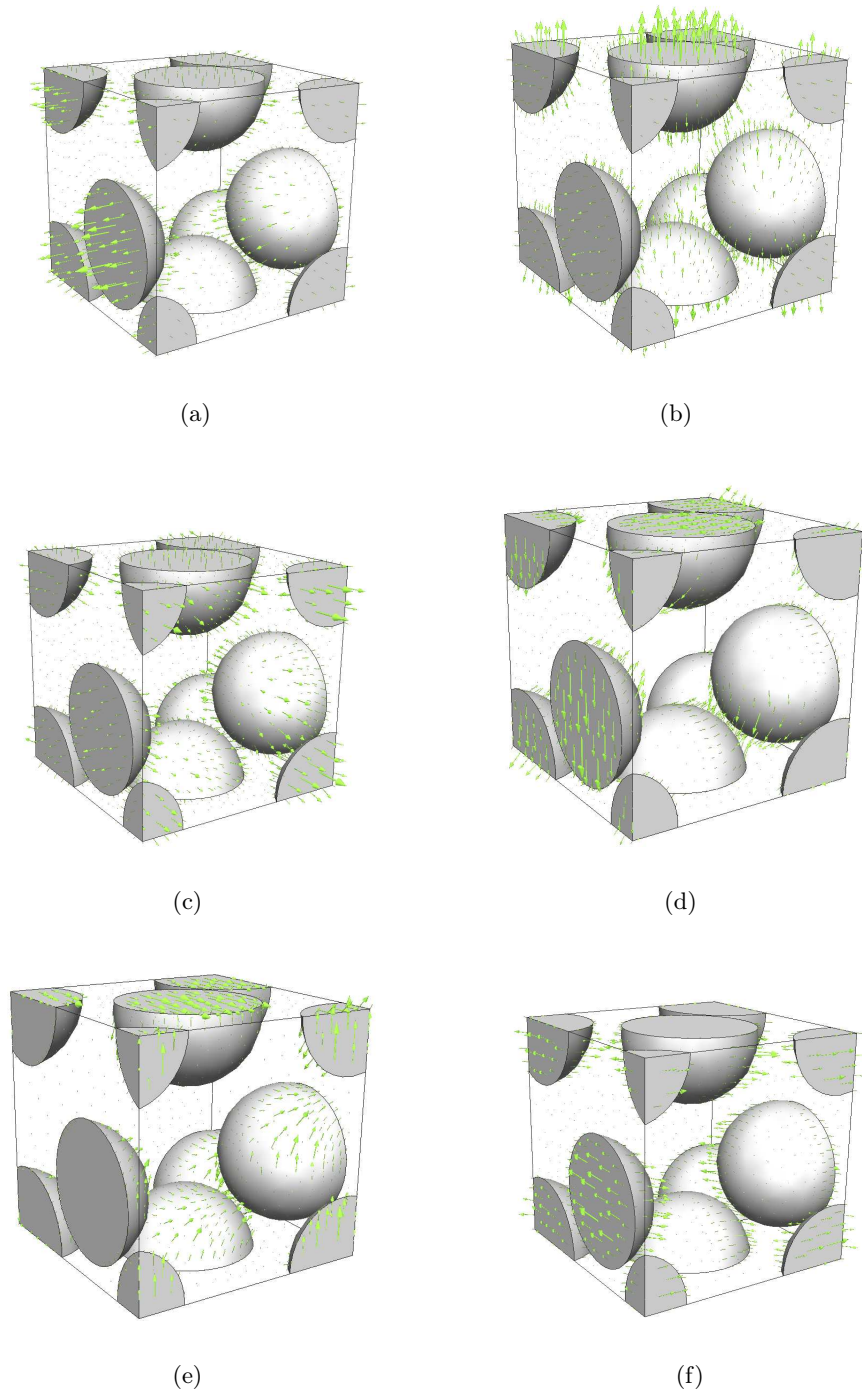


Figura 6.8: Vectores das solicitações mecânicas características da célula representativa unitária de material compósito de resina epóxida com 30% de partículas esféricas de fibra de vidro — modos normais (a) F_{11}^D , (b) F_{22}^D e (c) F_{33}^D , e modos de corte (d) F_{12}^D , (e) F_{23}^D e (f) F_{13}^D .

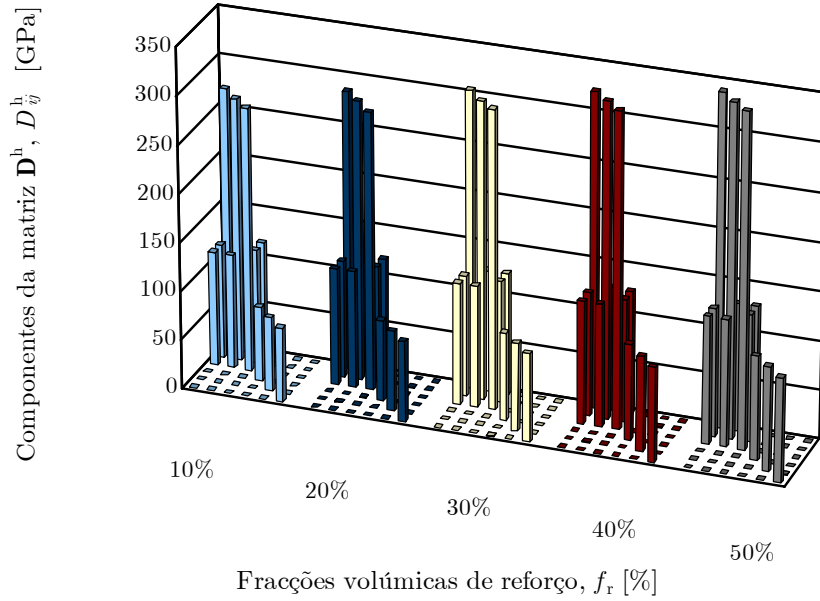


Figura 6.9: Componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de nitrato de alumínio com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.

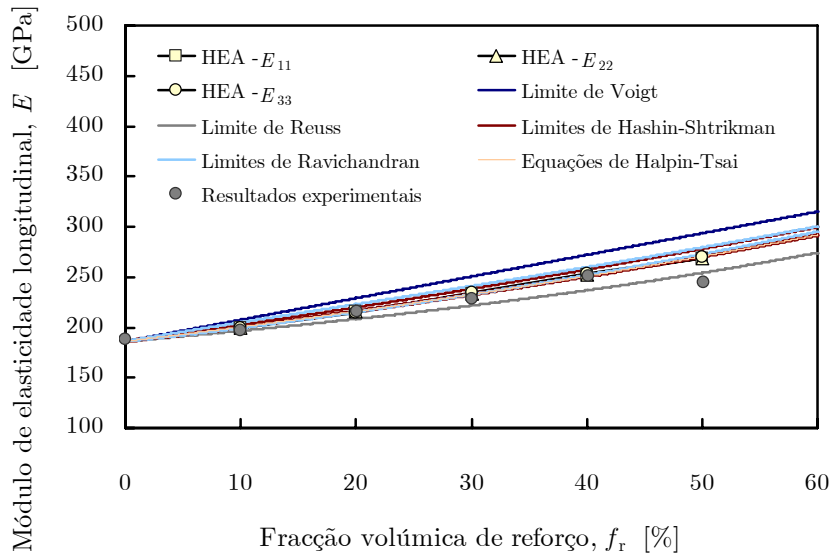


Figura 6.10: Variação do módulo de elasticidade longitudinal com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.

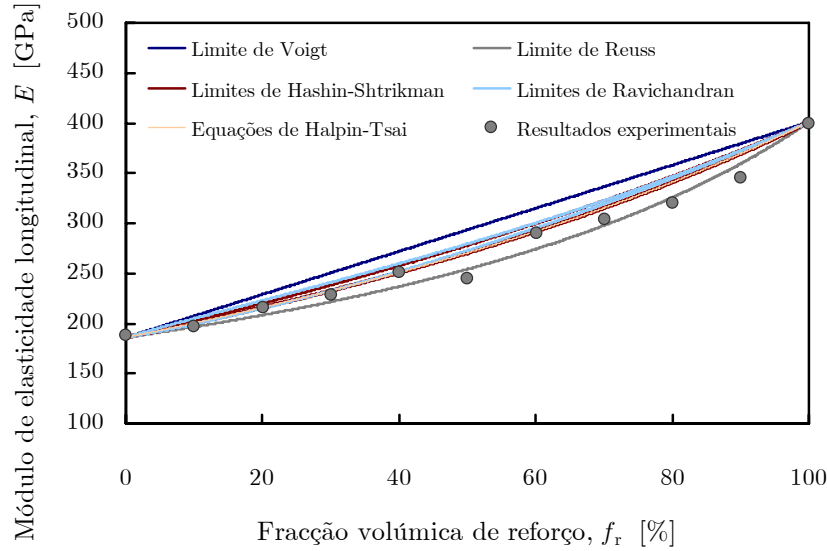


Figura 6.11: Resultados experimentais e de previsão analítica do módulo de elasticidade longitudinal, em conjunto com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para um material compósito de nitrato de alumínio com partículas esféricas de alumina.

inferiores de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, encontram-se ilustrados na figura 6.12. Verifica-se que resultam intervalos de previsão bastante estreitos, o que se deve ao facto de os valores do coeficiente de Poisson de ambos os materiais serem relativamente próximos. Além disso, os resultados experimentais encontram-se fora desses intervalos. Na figura 6.13 verifica-se que para valores de fracção volúmica acima dos 60% os resultados de previsão tendem a sobrestimar os valores do coeficiente de Poisson do material compósito em relação aos valores obtidos experimentalmente. Refira-se que com a adição de material de reforço na matriz, o material compósito se comporta como se fosse um material monolítico. Além disso, contrariamente ao pressuposto adoptado pela maioria dos modelos teóricos, o nitrato de alumínio e a alumina não se ligam na perfeição, em vez disso a interface é relativamente fraca [Hsieh e Tuan 2005].

6.2.3 Material compósito de cobalto reforçado com carboneto de tungsténio

Na figura 6.14 são apresentadas as componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de cobalto com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de carboneto de tungsténio. De acordo com o referido para os dois materiais compósitos anteriormente referidos, este material compósito se caracteriza por apresentar um carácter cúbico para fracções volúmicas de reforço inferiores a 30%, inclusive, apresentando um carácter ortotrópico para as fracções volúmicas de reforço superiores.

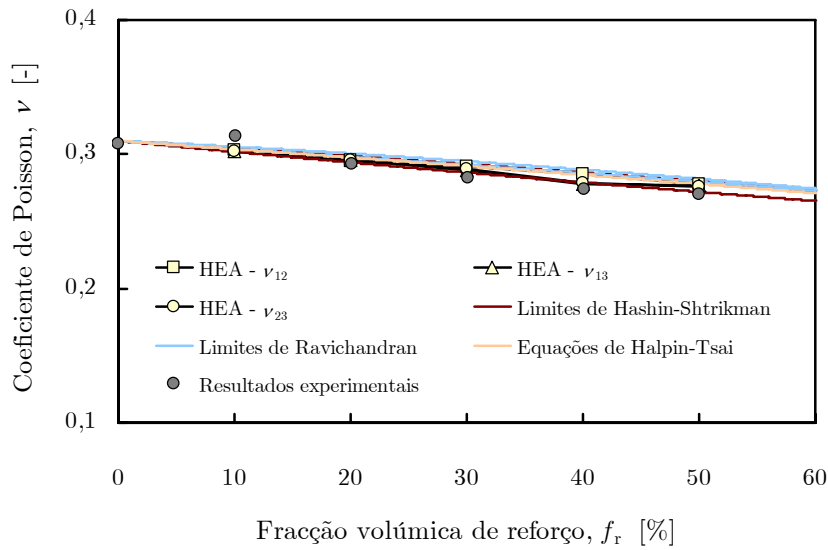


Figura 6.12: Variação do coeficiente de Poisson com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.

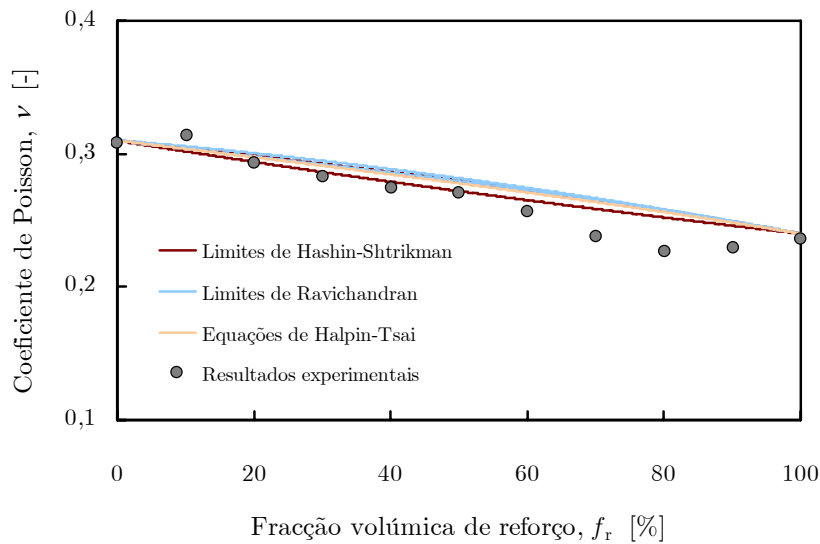


Figura 6.13: Variação do coeficiente de Poisson com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.

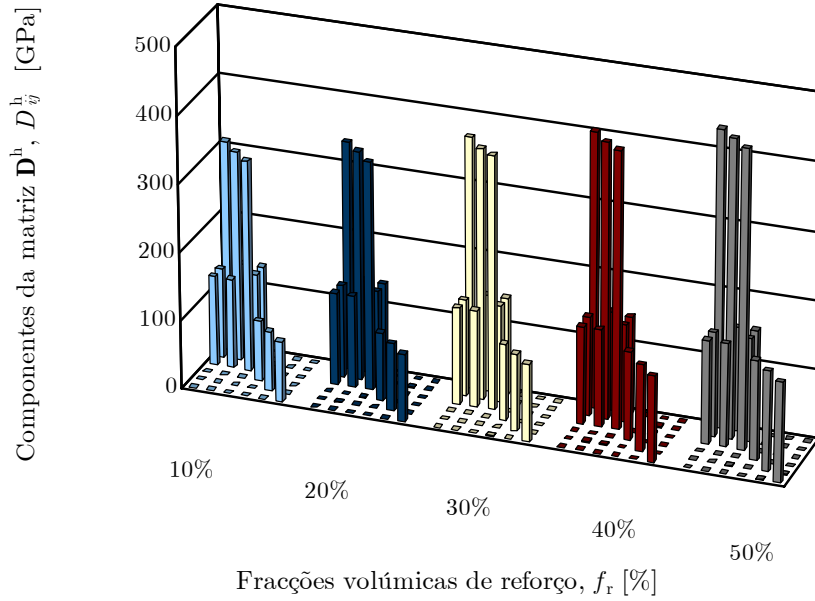


Figura 6.14: Componentes das matrizes \mathbf{D}^h , para células representativas unitárias de material compósito de cobalto com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de carboneto de tungsténio.

Os resultados numéricos, são apresentados, em conjunto com os resultados experimentais [Hsieh e Tuan 2005], os resultados analíticos e os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Strikman e de Ravichandran, na figura 6.15. Verifica-se que os resultados experimentais se encontram dentro dos intervalos formados pelos limites de Voigt-Reuss. O limite inferior de Hashin-Shtrikman coincide com os resultados de previsão analítica (equações de Halpin-Tsai). Os valores numéricos são apresentados com os três módulos de elasticidade longitudinal associados ao carácter ortotrópico do material compósito, encontrando-se estes também entre os limites de Voigt-Reuss, aproximando adequadamente os resultados experimentais.

Na figura 6.16, constata-se que os resultados experimentais seguem a tendência média associada aos limites de Ravichandran, apresentando-se, contudo, grande parte fora desses mesmos limites. Esta característica verifica-se para a grande maioria dos materiais compósitos de matriz metálica reforçados com um material cerâmico [Hsieh e Tuan 2005].

6.3 Propriedades Termoelásticas de Materiais Compósitos

Na presente secção são apresentados os resultados do estudo da influência da fracção volúmica de reforço no valor do coeficiente de expansibilidade térmica de materiais compósitos de partículas esféricas. O estudo foi efectuado para fracções volúmicas de reforço, f_r , compreendidas entre 10% e 50%.

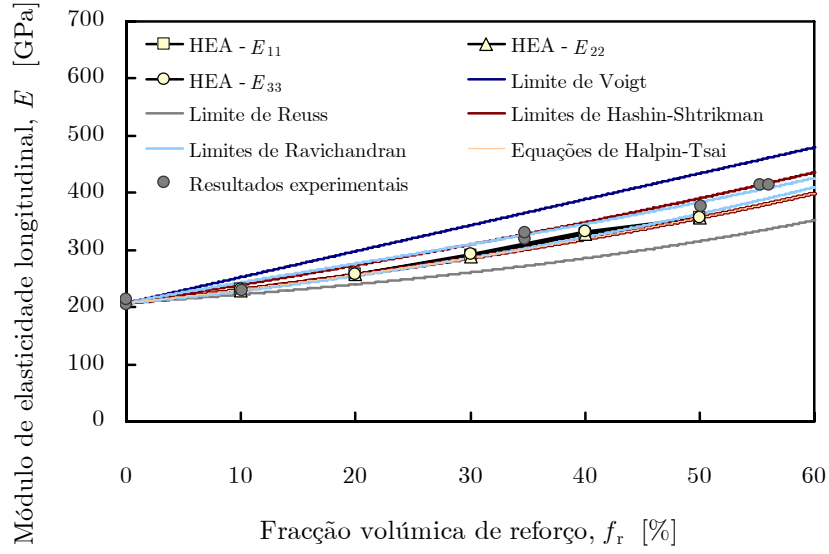


Figura 6.15: Variação do módulo de elasticidade longitudinal com a fração volúmica de reforço de partículas esféricas de carboneto de tungstênio, para um material compósito de matriz de cobalto.

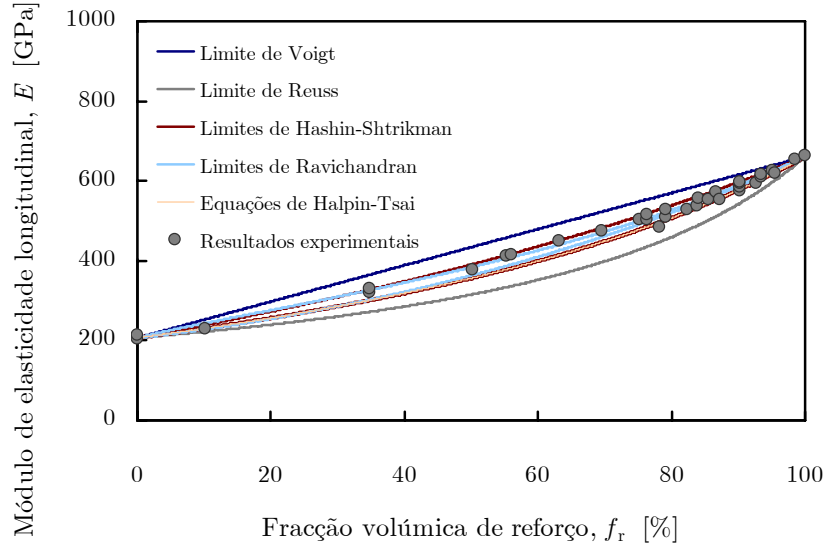


Figura 6.16: Resultados experimentais e de previsão analítica do módulo de elasticidade longitudinal, em conjunto com os limites superiores e inferiores de Voigt-Reuss, de Hashin-Shtrikman e de Ravichandran, para um material compósito de cobalto com partículas esféricas de carboneto de tungstênio.

6.3.1 Material compósito de nitrato de alumínio reforçado com alumina

Considerou-se um material compósito de nitrato de alumínio reforçado com partículas esféricas de alumina. As componentes dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, β^h , são apresentadas na figura 6.17. Verifica-se que estes valores são idênticos para uma mesma percentagem de fracção volúmica de reforço e que o aumento dessa percentagem induz um decréscimo no valor dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, β^h .

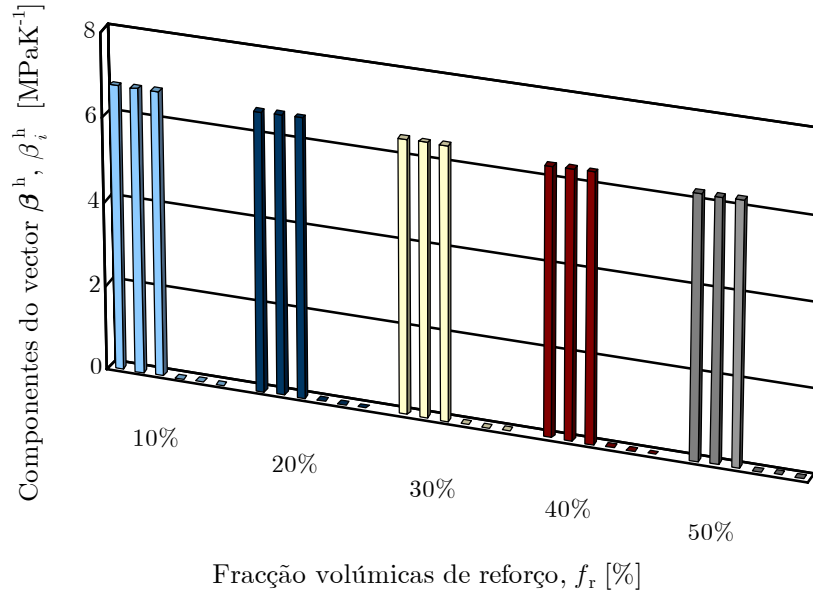


Figura 6.17: Componentes dos vectores dos módulos térmicos, β^h , para células unitárias de material compósito de nitrato de alumínio com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.

A multiplicação do vector homogeneizado dos módulos térmicos, β^h pela inversa da matriz constitutiva \mathbf{D}^h dá origem ao vector homogeneizado de coeficientes de expansibilidade térmica, α^h . Na figura 6.18 estes resultados são comparados com os resultados de previsão analítica e os resultados experimentais [Hsieh e Tuan 2007]. Os valores numéricos correspondem aos três coeficientes de expansibilidade térmica normal, sendo os restantes numericamente insignificantes, com ordens de grandeza 3 a 5 vezes inferiores. Constata-se que os intervalos são muito estreitos, o que se deve ao facto de o módulo de elasticidade (coeficiente de expansibilidade térmica) do material da matriz ser cerca de duas vezes inferior (superior) ao do material de reforço. Por outro lado, verifica-se que os valores experimentais não se encontram acima dos previstos pelo modelo de Kerner, o que sugere que este modelo possa ser usado para estimar um majorante para o coeficiente de expansibilidade térmica do material compósito [Hsieh e Tuan 2007].

Por fim, na figura 6.19 apresenta-se o campo dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, Ψ , para a célula representativa unitária de nitrato de alumínio constituída por 30% de partículas esféricas de alumina (*vd.* figura 6.1c).

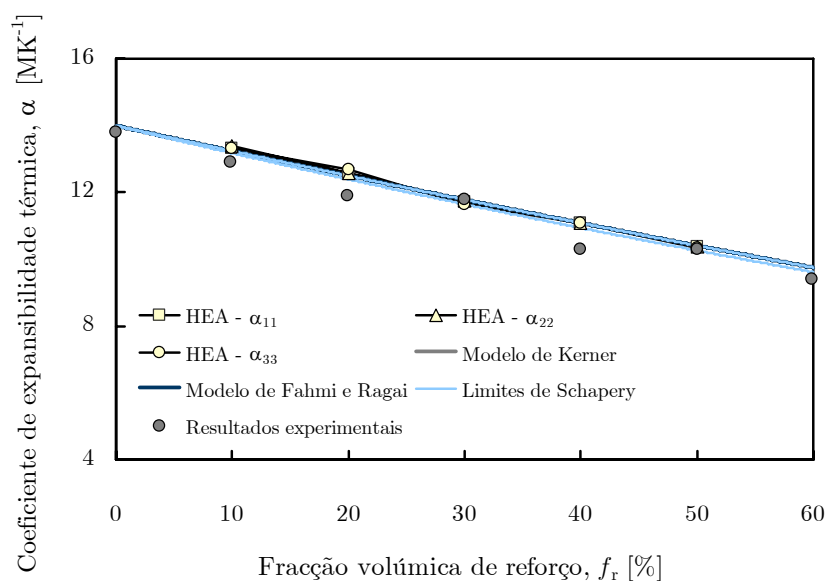


Figura 6.18: Variação do coeficiente de expansibilidade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de nitrato de alumínio.

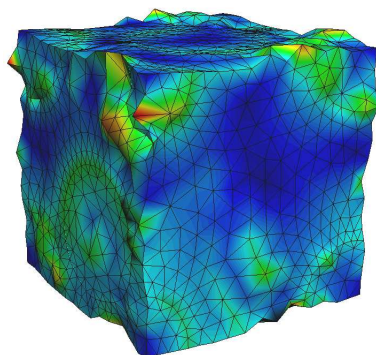


Figura 6.19: Campo dos coeficientes característicos de dilatação linear efectiva, Ψ , de uma célula representativa unitária de material compósito de nitrato de alumínio com 30% de partículas esféricas de alumina — representação da configuração deformada da célula representativa unitária.

6.3.2 Material compósito de cobre reforçado com diamante

Os vectores homogeneizados dos módulos térmicos para o material compósito de cobre (Cu) reforçado com partículas esféricas de diamante (C) podem ser visualizados na figura 6.20. Verifica-se que estes valores são idênticos para uma dada percentagem de fracção volúmica de reforço e que o aumento dessa percentagem induz um decréscimo no valor dos vectores homogeneizados dos módulos térmicos, β^h .

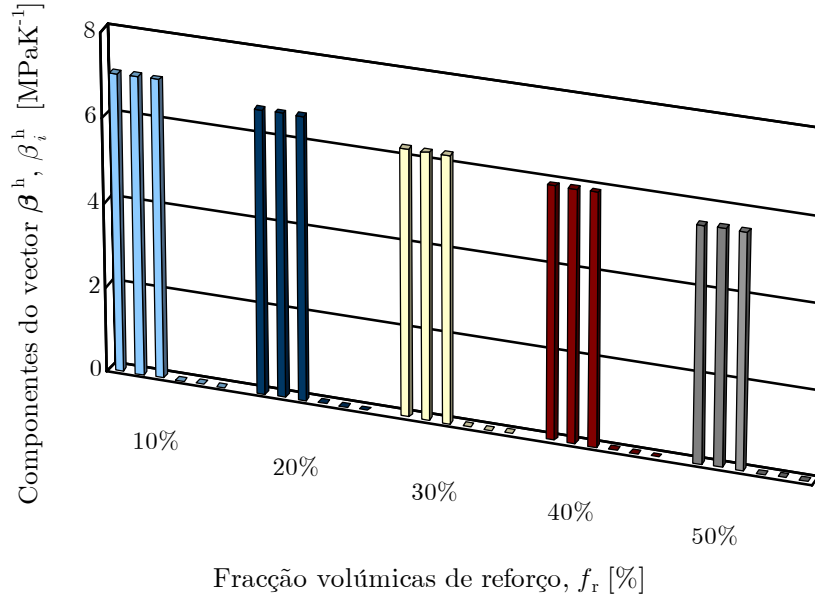


Figura 6.20: Componentes dos vectores dos módulos térmicos, β^h , para células unitárias de material compósito de cobre com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de diamante.

Os resultados numéricos do coeficientes de expansibilidade térmica são apresentados na figura 6.21, em conjunto com os resultados de previsão analítica e os experimentais, tanto para valores de f_r abaixo de 50% [Sun e Inal 1996] como para valores de f_r acima de 50% [Yoshida e Morigami 2004]. Os valores de previsão analítica encontram-se no intervalo formado pelos limites de Schapery. Por outro lado, o limite superior de Schapery coincide com o modelo de Fahmy e Ragai devido ao maior valor do módulo de elasticidade do material de reforço. Coincide também com o modelo de Kerner pois ambos consideram que o material compósito é reforçado com partículas esféricas.

Na figura 6.22 são apresentados os resultados experimentais do coeficientes de expansibilidade térmica em conjunto com os resultados de previsão analítica. Constata-se que, exceptuando os valores de fracções volúmicas de 50% e 60%, os resultados experimentais encontram-se dentro dos limites superior e inferior de Schapery. O coeficiente de expansibilidade térmica do material compósito pode ser manipulado através da alteração da fracção volúmica de material de reforço [Yoshida e Morigami 2004].

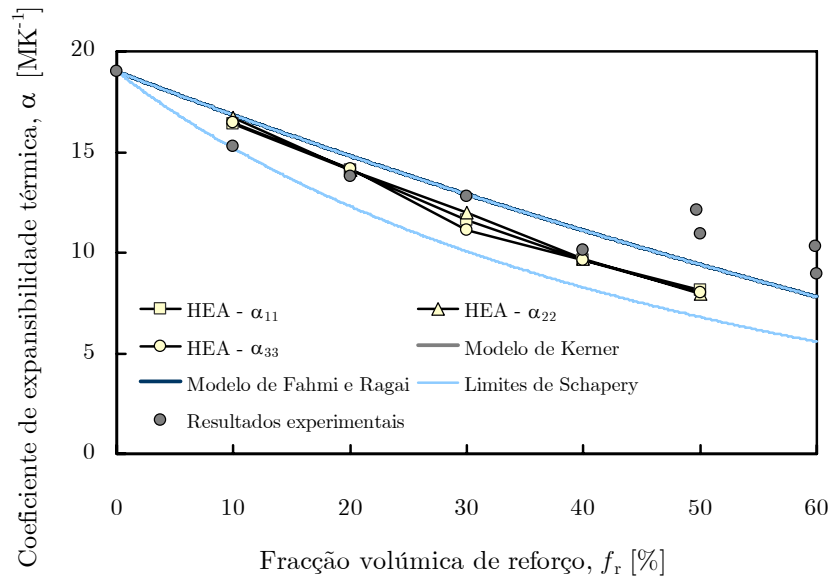


Figura 6.21: Variação do coeficiente de expansibilidade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de diamante, para um material compósito de matriz de cobre, com os resultados de previsão numérica.

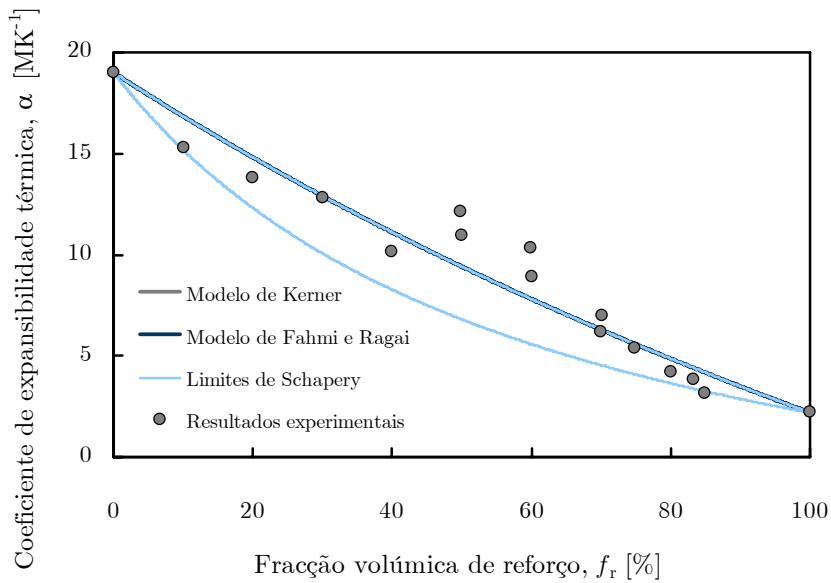


Figura 6.22: Variação do coeficiente de expansibilidade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de diamante, para um material compósito de matriz de cobre, com os resultados experimentais.

6.4 Propriedades Térmicas de Materiais Compósitos

Nesta secção procede-se à apresentação dos resultados obtidos no estudo da influência da fracção volúmica de reforço nos valores efectivos dos coeficientes de condutividade térmica de seis materiais compósitos reforçados com partículas esféricas. As fracções volúmicas de reforço, f_r , de cada material variam entre 10% e 50%, inclusive, obtendo-se as matrizes homogeneizadas de condutividade térmica, \mathbf{k}^h .

6.4.1 Material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com alumina

Na figura 6.23, pode-se observar a evolução dos valores de condutividade térmica para um material compósito de polietileno de alta densidade (HDPE) reforçado com partículas esféricas de alumina (Al_2O_3). Constata-se que com o aumento da fracção volúmica do reforço os valores dos coeficientes de condutividade térmica normal também aumentam, o que se deve ao facto da condutividade térmica da alumina ser superior à do polietileno de alta densidade. Para valores acima de 20% de fracção volúmica de reforço manifesta-

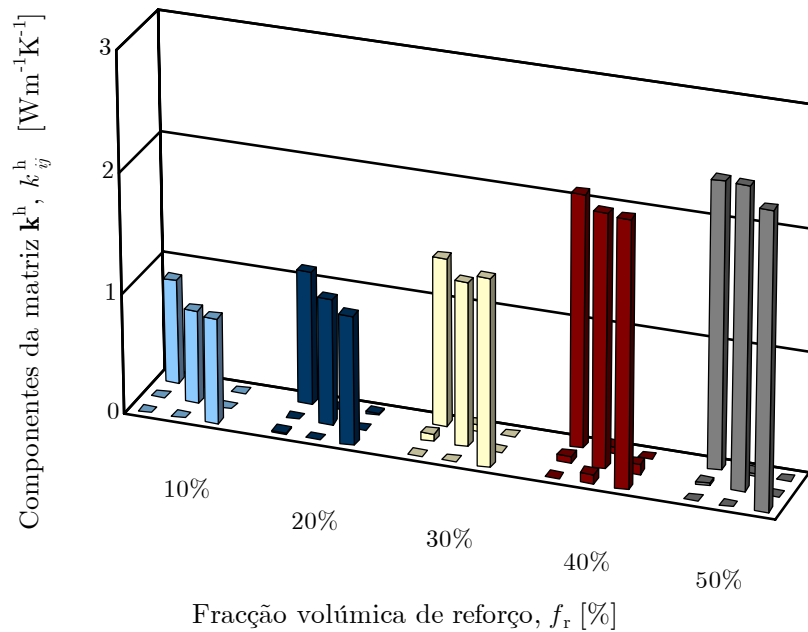


Figura 6.23: Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.

se o aparecimento de componentes de condutividade térmica não-normal, o que revela a existência uma percentagem de anisotropia do material compósito, mas com percentagens bastante diminutas em relação aos valores das componentes de condutividade térmica normal, a diagonal de \mathbf{k}^h . Isto não invalida que, na prática, o material compósito se possa considerar ortotrópico.

Os resultados numéricos são comparados com os resultados de previsão analítica, os limites analíticos de Hashin-Shtrikman e os resultados experimentais [Tavman 2003], na figura 6.24. Verifica-se que os resultados do modelo de Maxwell coincidem com os do limite inferior de Hashin-Shtrikman. Por outro lado, são as previsões de Landauer as que mais se aproximam dos resultados experimentais. Com o aumento da fracção volúmica de reforço o limite superior de Hashin-Shtrikman tendem a divergir dos resultados experimentais e numéricos. No que concerne aos resultados numéricos, apresentam-se os valores correspondentes aos três coeficientes de condutividade térmica normal, como anteriormente referido, verificando-se que estes tendem a subestimar os valores do coeficiente de condutividade térmica para as fracções volúmicas de reforço mais elevadas.

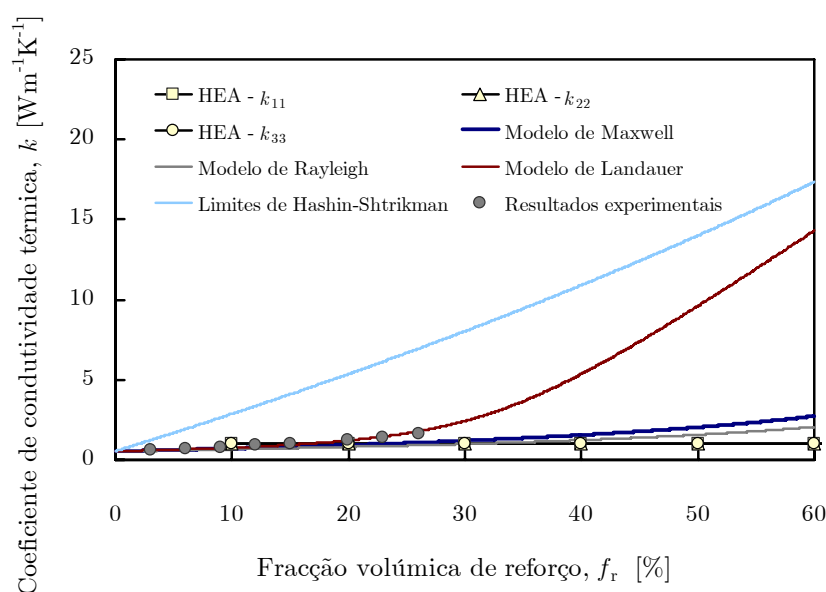


Figura 6.24: Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de polietileno de alta densidade.

Por fim, o campo de deslocamentos termocaracterísticos, $\mathbf{\Upsilon}$, é ilustrado na figura 6.25, para a célula representativa unitária de polietileno de alta densidade constituída por 30% de partículas esféricas de alumina (*vd.* figura 6.1c).

6.4.2 Material compósito de polietileno de alta densidade reforçado com estanho

Relativamente ao material compósito constituído por polietileno de alta densidade (HDPE) e estanho (Sn) como materiais da matriz e de reforço, respectivamente, verifica-se que a evolução das componentes da matriz de condutividade térmica é idêntica à observada para o compósito anterior, conforme se verifica na figura 6.26. O coeficiente de condutividade térmica do material de reforço é superior ao polietileno de alta densidade, aumentando as componentes da matriz de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço.

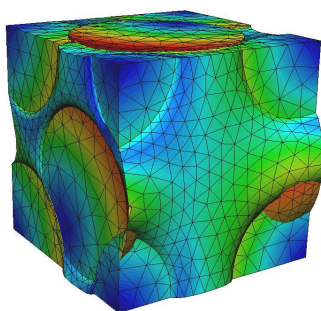


Figura 6.25: Ilustração do campo de deslocamentos termocaracterísticos, Υ , da célula representativa unitária associada ao material compósito de polietileno de alta densidade com 30% de partículas esféricas de alumina.

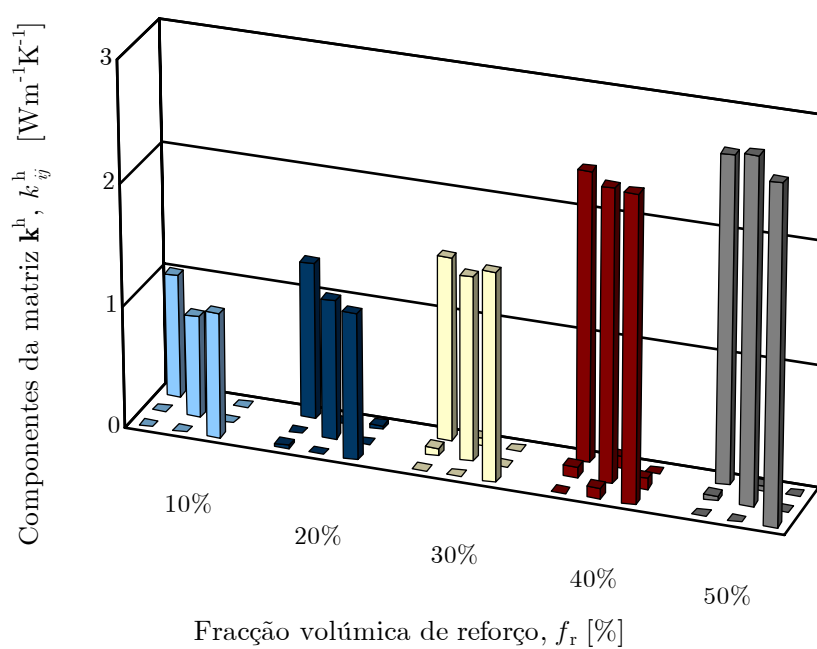


Figura 6.26: Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de polietileno de alta densidade com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de estanho.

Por outro lado, os resultados numéricos do coeficiente de condutividade térmica são apresentados na figura 6.27, em conjunto com os resultados de previsão analítica, os limites analíticos de Hashin-Strikman e os resultados experimentais [Kumlutas e Tavman 2006]. Mais uma vez se verifica que o limite inferior de Hashin-Strikman coincide com os valores do modelo de Maxwell. Constata-se ainda que, com o aumento da fracção volúmica de reforço, o limite superior de Hashin-Strikman e o modelo de Landauer tendem a divergir dos resultados numéricos. Abaixo dos 10% de fracção volúmica de reforço os resultados experimentais encontram-se ligeiramente abaixo dos modelos analíticos, mas para valores superiores o modelo analítico de Maxwell e o limite inferior de Hashin-Strikman prevêem relativamente bem o coeficiente de condutividade térmica deste material compósito [Kumlutas e Tavman 2006]. Por fim, verifica-se que, para as fracções volúmicas de reforço mais elevadas, os resultados numéricos tendem a sobrestimar os valores do coeficiente de condutividade térmica relativamente ao modelo analítico de Maxwell e ao limite inferior de Hashin-Strikman.

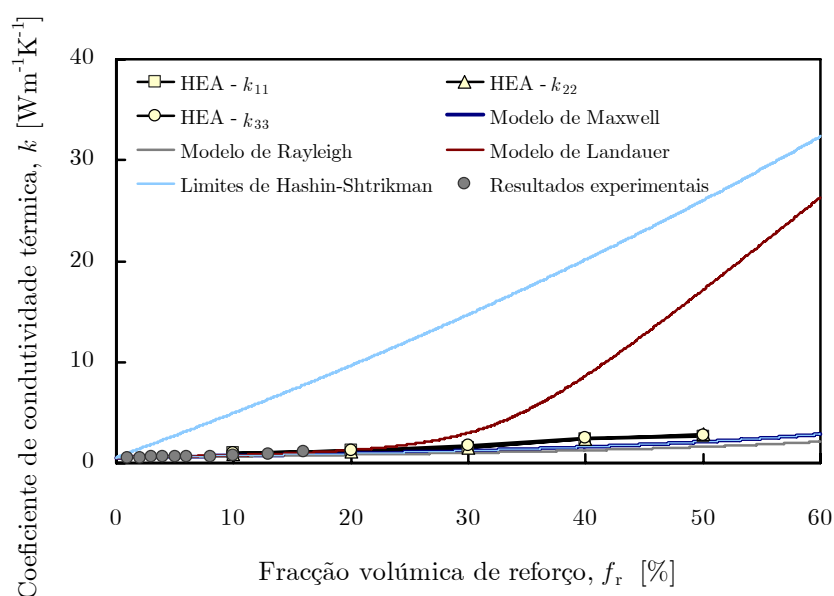


Figura 6.27: Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de estanho, para um material compósito de matriz de polietileno de alta densidade.

6.4.3 Material compósito de politetrafluoroetileno reforçado com grafite

Na figura 6.28 são apresentados os resultados das componentes das matrizes de condutividade térmica para o material compósito formado por politetrafluoroetileno (PTFE) reforçado com partículas esféricas de grafite (C). Verifica-se que o aumento da fracção volúmica de reforço leva a um aumento das componentes das matrizes de condutividade térmica, sendo este mais acentuado para valores de fracção volúmica superiores a 30%. Este facto pode ser explicado pela grande diferença entre o coeficiente de condutividade térmica

do reforço e da matriz. Verifica-se ainda a existência de componentes de condutividade térmica não-normal desde as fracções volúmicas de 20% de reforço. No entanto, sendo estas uma percentagem diminuta em relação às componentes de condutividade térmica normal, o material compósito pode ser considerado ortotrópico.

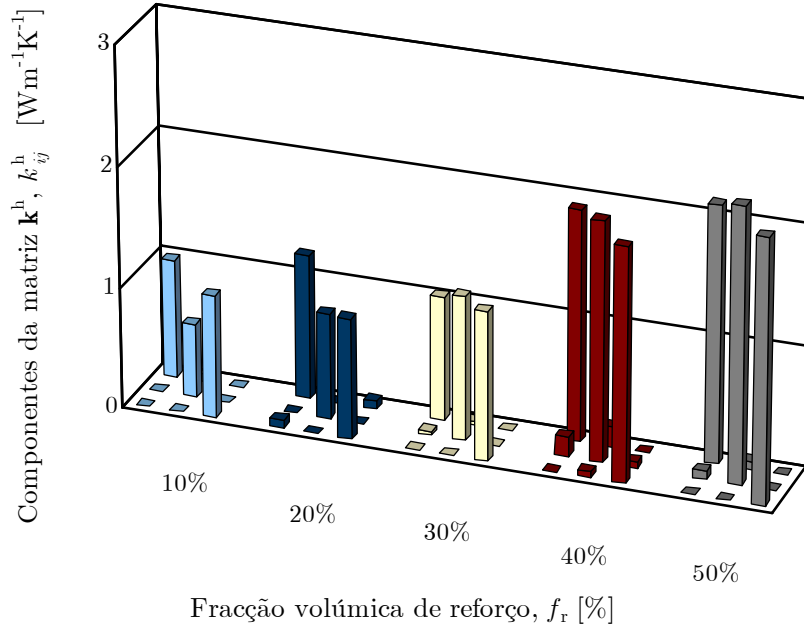


Figura 6.28: Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de politetrafluoroetileno com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de grafite.

Na figura 6.29 são apresentados os resultados numéricos, em conjunto com os resultados de previsão analítica, os limites analíticos de Hashin-Strikman e os resultados experimentais [Cai *et al.* 2005] do coeficiente de condutividade térmica do material compósito. Verifica-se que os valores do modelo de Rayleigh são novamente o limite inferior tanto dos resultados experimentais como dos resultados de previsão analítica. Os valores do modelo de Maxwell coincidem com o limite inferior de Hashin-Strikman e são, em termos de tendência média, os que melhor aproximam os resultados experimentais. Verifica-se ainda que, com o aumento da fracção volúmica de reforço, os resultados de previsão numérica se afastam ligeiramente dos valores do limite inferior de Hashin-Strikman e dos valores do modelo de Maxwell, não acompanhando a evolução abrupta dos resultados do modelo de Landauer. Este facto sugere que, mesmo para as fracções volúmicas mais elevadas, a superfície de contacto entre partículas de reforço, cuja condutividade térmica é superior à da matriz, não será significativa. De facto, a adição de materiais de reforço metálicos ou à base de carbono com um elevado coeficiente de condutividade térmica em materiais de matriz polimérica consiste num modo bastante expedito para se aumentar a condutividade térmica dos compósitos de matriz polimérica, conforme se requer em inúmeras aplicações industriais [Kumlatas e Tavman 2006].

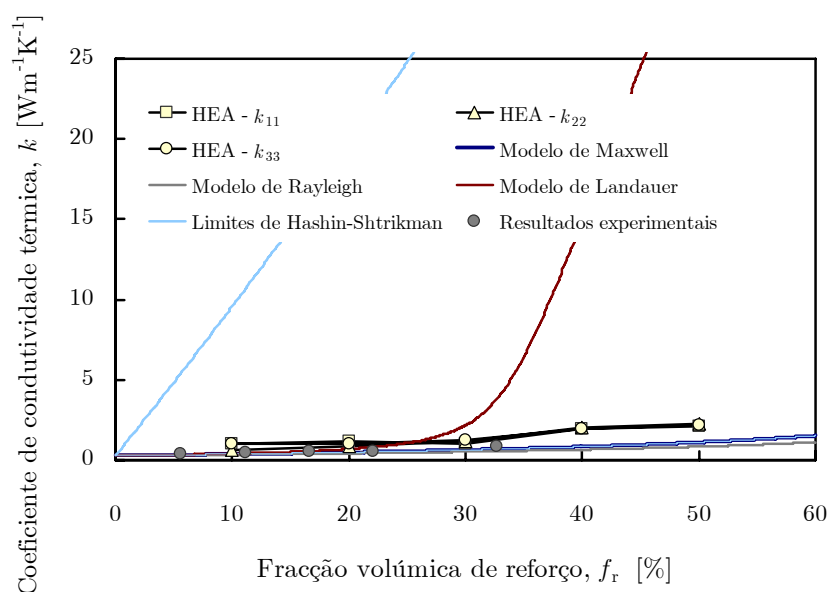


Figura 6.29: Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de grafite, para um material compósito de matriz de politetrafluoroetileno.

6.4.4 Material compósito de resina epóxida reforçado com sílica

Os resultados das componentes das matrizes de condutividade térmica para o material compósito de resina epóxida reforçado com partículas esféricas de sílica (SiO_2), são apresentados na figura 6.30. Verifica-se um aumento dessas componentes com o aumento da fracção volúmica de reforço, mas de forma menos acentuada do que para o material compósito anterior (*vd.* Secção 6.4.3). Este facto deve-se à pequena diferença entre os coeficientes de condutividade térmica dos materiais da matriz e do reforço.

Os resultados numéricos dos coeficientes de condutividade térmica com os resultados de previsão analítica, os limites analíticos de Hashin-Strikman e os resultados experimentais [Lim 2001] são apresentados na figura 6.31. Verifica-se que os resultados experimentais se encontram no intervalo definido pelos modelos de Rayleigh e Landauer. No entanto, são os resultados do modelo de Maxwell, que coincidem com os valores do limite inferior de Hashin-Strikman, os que melhor se aproximam dos resultados experimentais.

6.4.5 Material compósito de resina epóxida reforçado com alumina

Na figura 6.32 são apresentados os resultados das componentes das matrizes de condutividade térmica para o material compósito de resina epóxida reforçado com partículas esféricas de alumina (Al_2O_3). Constatase que a substituição da sílica por alumina (*cf.* Secção 6.4.4), no que respeita ao material de reforço, resulta numa evolução mais acentuada do coeficiente de condutividade térmica.

Na figura 6.33 são apresentados os resultados numéricos, em conjunto com os resultados analíticos, os limites analíticos de Hashin-Strikman e os resultados experimentais

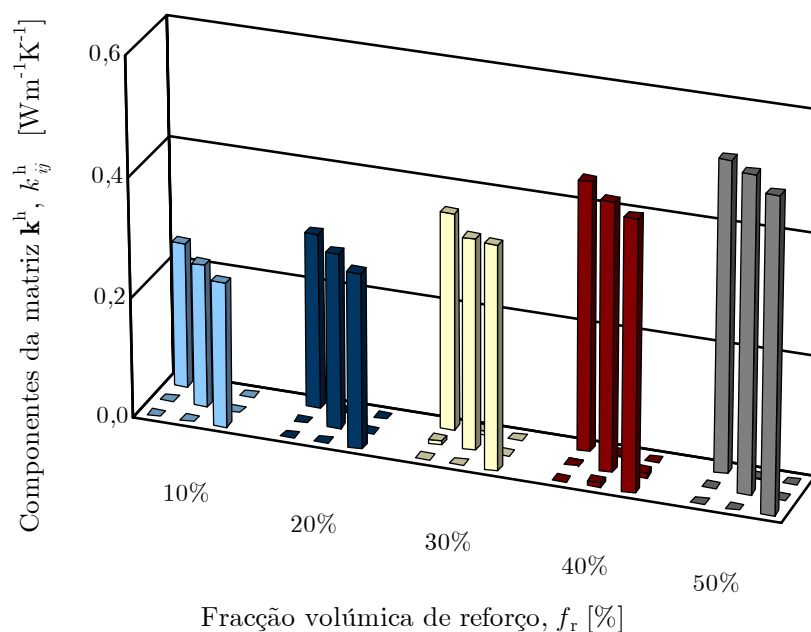


Figura 6.30: Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de sílica.

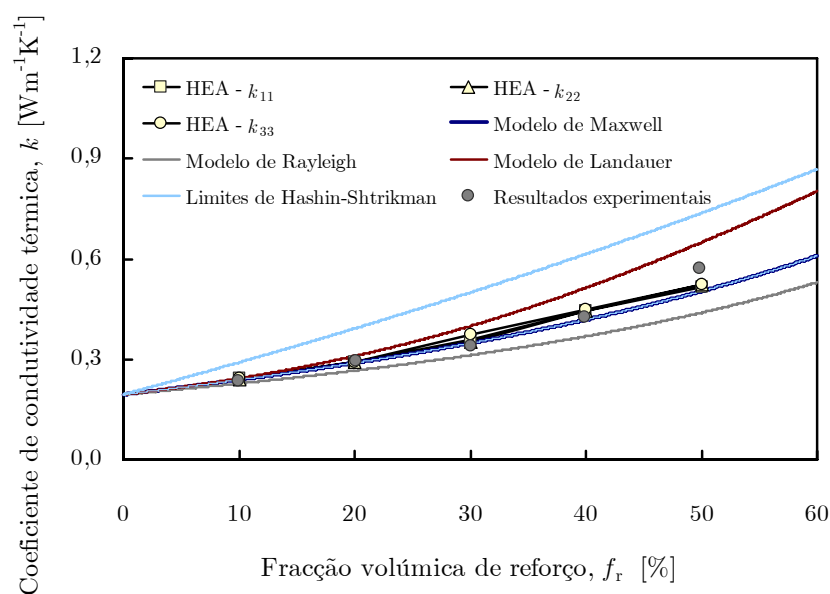


Figura 6.31: Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de sílica, para um material compósito de matriz de resina epóxida.

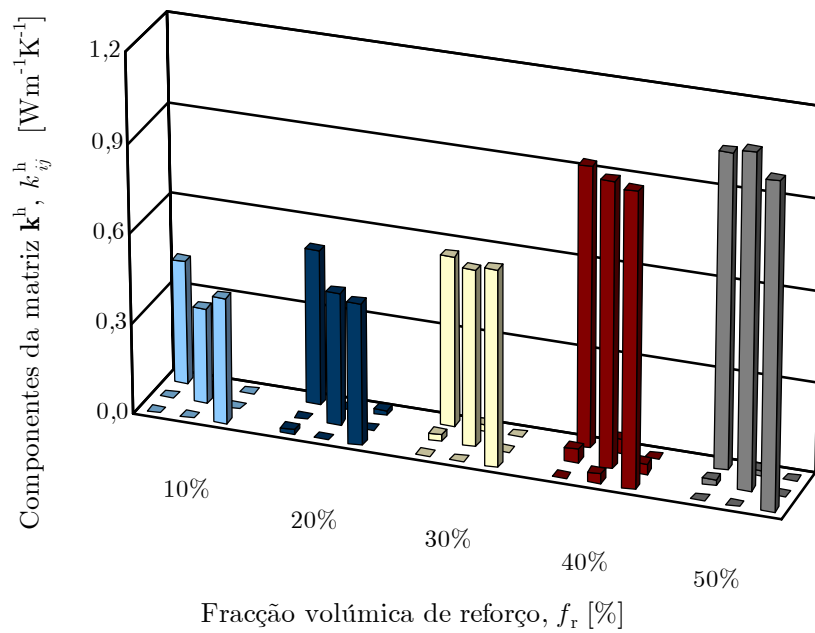


Figura 6.32: Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de resina epóxida com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.

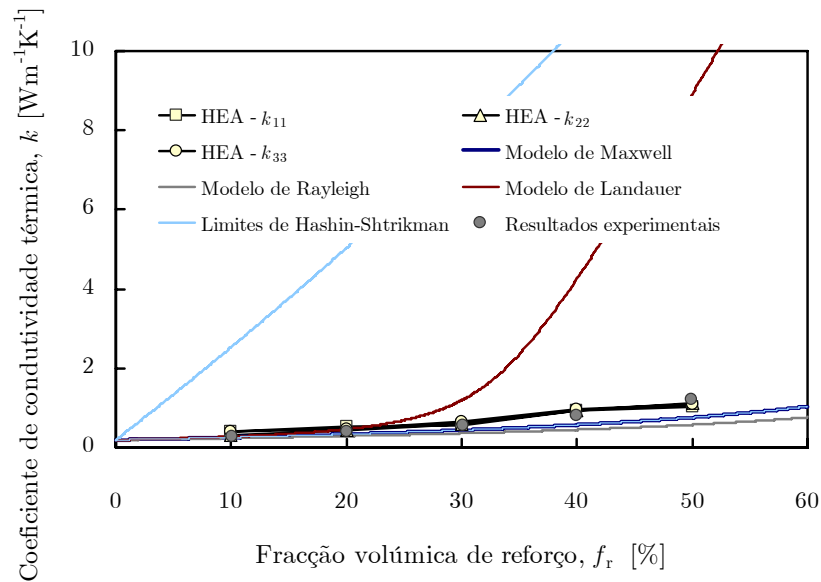


Figura 6.33: Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de resina epóxida.

[Lim 2001], do coeficiente de condutividade térmica. Constata-se que os resultados experimentais se afastam mais acentuadamente das curvas dos valores do limite superior de Hashin-Strikman e do modelo de Landauer neste caso que na situação do reforço ser constituído por alumina (*vd.* figura 6.31).

6.4.6 Material compósito de vidro reforçado com alumina

Os resultados das componentes das matrizes de condutividade térmica para o material compósito de vidro reforçado com alumina (Al_2O_3) são apresentados na figura 6.34. Pode verificar-se que os coeficientes de condutividade térmica normal aumentam com o aumento da fracção volúmica de reforço, pois o coeficiente de condutividade térmica do material de reforço é superior ao do material da matriz. Por outro lado, as componentes de condutividade térmica não-normal são insignificantes face às componentes de condutividade térmica normal, pelo que, mais uma vez, se pode considerar o material compósito como ortotrópico.

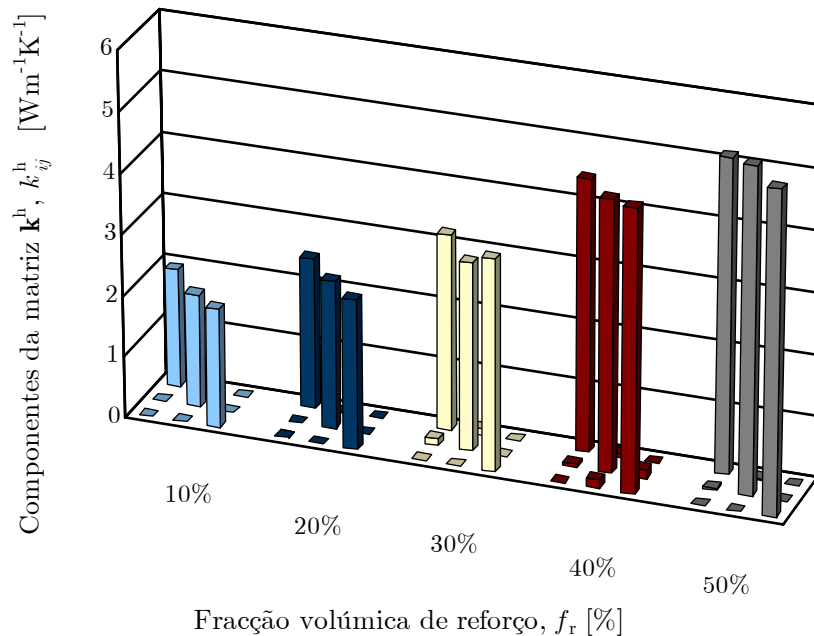


Figura 6.34: Componentes das matrizes de condutividade térmica, para células representativas unitárias de material compósito de vidro com 10% a 50% de fracção volúmica de reforço de partículas esféricas de alumina.

Os resultados numéricos são comparados na figura 6.35 quer com os resultados de previsão analítica quer com os limites analíticos de Hashin-Strikman e com os resultados experimentais [Doyen *et al.* 2007]. Verifica-se que, com o aumento da percentagem de fracção volúmica de reforço, os resultados experimentais se afastam, em termos de dispersão, das curvas do modelo de Maxwell e dos valores do limite inferior de Hashin-Strikman, que coincidem. Este facto pode ser associado à ocorrência de fenómenos de interacção dos materiais da matriz e de reforço.

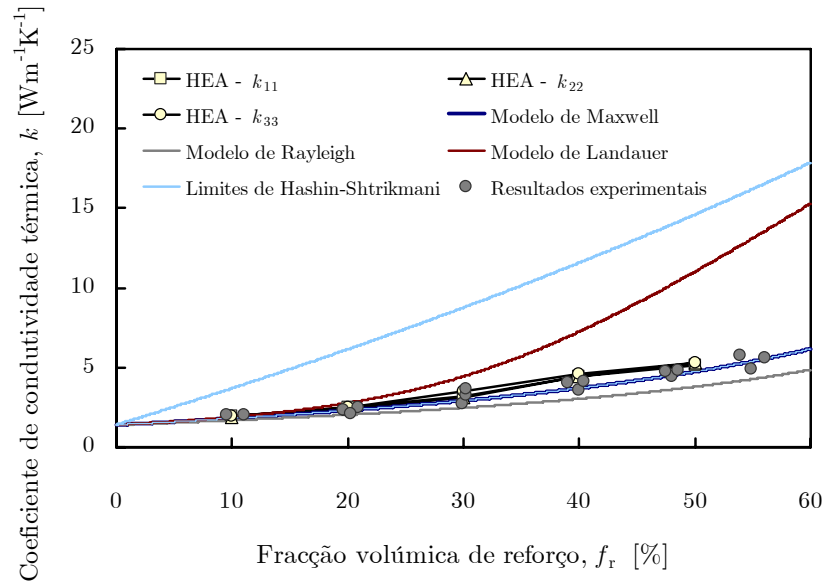


Figura 6.35: Variação do coeficiente de condutividade térmica com a fração volumétrica de reforço de partículas esféricas de alumina, para um material compósito de matriz de vidro.

Por fim, refira-se que, para os valores superiores de fração volumétrica de reforço, os resultados numéricos acompanham, embora por excesso, os resultados experimentais.

Capítulo 7

Conclusões Gerais

O principal objectivo deste trabalho centrou-se no estudo comparativo de propriedades termoelásticas de materiais compósitos obtidas através de procedimentos numéricos de homogeneização por expansão assintótica e de métodos de previsão analítica com resultados experimentais obtidos a partir de fontes bibliográficas. Este trabalho foi desenvolvido no âmbito da investigação levada a cabo no GRIDS [Oliveira 2006, Pinho-da-Cruz 2007], no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro.

Numa primeira fase, foi realizada uma significativa revisão bibliográfica dos vários modelos de previsão analítica e de resultados experimentais. Uma vez encontrados valores experimentais representativos e adequados ao estudo proposto, passou-se à determinação dos valores de previsão analítica para os vários modelos adoptados.

Posteriormente, com os códigos numéricos SPHERECELL e COMMA3D, procedeu-se ao estudo do efeito da fracção volúmica de reforço nas propriedades termoelásticas dos materiais compósitos analisados. Foram apenas considerados materiais compósitos de partículas esféricas.

Os resultados numéricos foram comparados com os resultados analíticos e com os resultados experimentais. Procedeu-se a uma apresentação dos resultados de forma sucinta e esquemática, com uma análise crítica em cada caso.

Em termos gerais, constatou-se que os resultados numéricos obtidos com base no método de homogeneização por expansão assintótica aproximam adequadamente os resultados experimentais obtidos, fornecendo, de um modo geral, valores mais precisos do que os dos restantes métodos analíticos.

Deste modo, pode afirmar-se que a técnica de homogeneização por expansão assintótica se revela bastante eficaz para a determinação dos valores efectivos dos coeficientes de condutividade térmica de um material compósito com partículas esféricas.

Esta página foi intencionalmente deixada em branco.

Bibliografia

- [Cai *et al.* 2005] W.-Z. Cai, S.-T. Tu, G.-L. Tao; Thermal Conductivity of PTFE Composites with Three-Dimensional Randomly Distributed Fillers, *Journal of Thermoplastic Composite Materials* **18**(3):241–253, 2005.
- [Cho *et al.* 2007] J. Cho, J.J. Luo, I.M. Daniel; Mechanical Characterization of Graphite/Epoxy Nanocomposites by Multi-Scale Analysis, *Composites Science and Technology* **67**(11-12):2399–2407, 2007.
- [Cioranescu e Donato 1999] D. Cioranescu e P. Donato; *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Vol.17, Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 1999.
- [Dal Maso 1993] G. Dal Maso; An Introduction to Γ -Convergence, Birkäuser, Boston, Estados Unidos da América, 1993.
- [De Giorgi e Spagnolo 1973] E. De Giorgi e S. Spagnolo; Sulla Convergenza degli Integrali dell'Energia per Operatori Ellittici del Secondo Ordine, *Bollettino della Unione Matematica Italiana* **8**(4):391–411, 1973.
- [Doyen *et al.* 2007] N. Tessier-Doyen, X. Grenier, M. Huger, D.S. Smith, D. Fournier, J.P. Roger; Thermal Conductivity of Alumina Inclusion/Glass Matrix Composites Materials: Local and Macroscopic Scales, *Journal of the European Ceramic Society* **27**:2635–2640, 2007.
- [Fahmy e Ragai 1970] A.A. Fahmy e A.N.Ragai; Thermal-Expansion Behavior of Two-Phase Solids, *Journal of Applied Physics* **41**(13):5108–5111, 1970.
- [Fan *et al.* 1992] Z. Fan, P. Tsakiroopoulos, A.P. Miodownik; Prediction of Young's Modulus of Particulate Two Phase Composites, *Materials Science Technology* **8**(10):922–929, 1992.
- [Hale 1976] D.K. Hale; The Physical Properties of Composite Materials, *Journal of Materials Science* **11**(11):2105–2141, 1976.
- [Halpin e Kardos 1976] J.C. Halpin e J.L. Kardos; The Halpin–Tsai Equations: A Review, *Polymer Engineering and Science* **16**(5):344–352, 1976.
- [Hashin 1983] Z. Hashin; Analysis of Composite Materials: A Survey, *Journal of Applied Mechanics* **50**(3):481–505, 1983.

- [Hashin e Shtrikman 1962] Z. Hashin e S. Shtrikman; On Some Variational Principles in Anisotropic and Nonhomogeneous Elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **10**(4):335–342, 1962.
- [Hashin e Shtrikman 1963] Z. Hashin e S. Shtrikman; A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **11**(2):127–140, 1963.
- [Hill 1963] R. Hill; Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **11**(5):357–372, 1963.
- [Hsieh e Tuan 2005] C.L. Hsieh, W.H. Tuan; Elastic Properties of Ceramic-Metal Particulate Composites, *Materials Science and Engineering A* **393**(1-2):133–139, 2005.
- [Hsieh e Tuan 2006] C.L. Hsieh, W.H. Tuan; Elastic and Thermal Expansion Behaviour of Two-Phase Composites, *Materials Science and Engineering A* **425**(1-2):349–260, 2006.
- [Hsieh e Tuan 2007] C.L. Hsieh, W.H. Tuan; Thermal Expansion Behavior of a Model Ceramic-Metal Composite, *Materials Science and Engineering A* **460–461**:453–458, 2007.
- [Huang *et al.* 2006] S.-I. Huang, T.-H. Chen, H. Chen; Study on the Composites of Two Sized Silica Filled in PTFE, *Journal of Reinforced Plastics and Composites* **25**(10):1053–1058, 2006.
- [Kaye e Laby 1989] Kaye G.W.C. e Laby T.H.; *Tables of Physical and Chemical Constants*, 14.^a Ed., McGraw-Hill, Londres, Reino Unido, 1989.
- [Kerner 1956] E.H. Kerner; The Elastic and Thermo-Elastic Properties of Composite Media, *Proceedings of the Physical Society – Section B* **69**(8):808–813, 1956.
- [Kumlutas e Tavman 2006] D. Kumlutas e I.H. Tavman; A Numerical and Experimental Study on Thermal Conductivity of Particle Filled Polymer Composites, *Journal of Thermoplastic Composite Materials* **19**(4):441–455, 2006.
- [Landauer 1952] R. Landauer; The Electrical Resistance of Binary Metallic Mixtures, *Journal of Applied Physics* **23**(7):779–784, 1952.
- [Lim 2001] T.C. Lim; Unified Practical Bounds for the Thermal Conductivity of Composite Materials, *Materials Letters* **54**(2):152–157, 2002.
- [Lommens *et al.* 2005] P. Lommens, C. De Meyer, E. Bruneel, K. De Buysser, I. Van Driessche, S. Hoste; Synthesis and Thermal Expansion of ZrO₂/ZrW₂O₈ Composites, *Journal of the European Ceramic Society* **25**(16):3605–3610, 2005.
- [Mark 1999] J.E. Mark; *Polymer Data Handbook*, Oxford University Press, Inc., Nova Iorque, Estados Unidos da América, 1999.
- [Maxwell 1873] J.C. Maxwell; *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, Reino Unido, 1873.
-

- [Moysey e Thompson 2007] P.A. Moysey e M.R. Thompson; Determining the Collision Properties of Semi-Crystalline and Amorphous Thermoplastics for DEM Simulations of Solids Transport in a Extruder, *Chemical Engineering Science* **62**(14):3699–3709, 2007.
- [Murat e Tartar 1997] F. Murat e L. Tartar; *H-Convergence*, Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials, Series Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications Vol.31, pp.21–43, Birkäuser, Boston, Estados Unidos da América, 1997.
- [Oliveira 2006] J.A.D. Oliveira. *Modelação Micromecânica do Comportamento de Materiais Compósitos de Matriz de Alumínio*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 2006.
- [Oliveira et al. 2004] J.A. Oliveira, J. Pinho-da-Cruz, A. Andrade-Campos e F. Teixeira-Dias. *On the Modelling of Representative Unit-Cell Geometries with GiD*, Actas da 2nd Conference on Advances and Applications of GiD — GiD 2004, Monografia CIMNE n.º 88, CIMNE, Barcelona, Espanha, pp. 181–184, 2004.
- [Pinho-da-Cruz 2007] J.A.M. Pinho-da-Cruz; *Caracterização Termomecânica da Materiais Multifásicos Utilizando Procedimentos de Homogeneização*, Dissertação de Tese de Doutoramento em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro, Portugal, 2007.
- [Poisson 1824] S.D. Poisson; *Second Mémoire sur la Théorie du Magnétisme*, Académie Royale des Sciences de l’Institut de France **5**:488–533, 1824.
- [Qu e Wong 2002] J. Qu e C.P. Wong; Effective Elastic Modulus of Underfill Material for Flip-Chip Applications, *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, **25**(1):53–55, 2002.
- [Rae e Dattelbaum 2004] P.J. Rae e D.M. Dattelbaum; The Properties of Poly(tetrafluoroethylene) (PTFE) in Compression, *Polymer* **45**(22):7615–7625, 2004.
- [Ravichandran 1994] K.S. Ravichandran; Elastic Properties of Two-Phase Composites, *Journal of the American Ceramic Society* **77**(5):1178–1184, 1994.
- [Rayleigh 1892] J.W. Rayleigh; On the Influence of Obstacles Arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Medium, *Philosophical Magazine* **34**(5):481–502, 1892.
- [Reuss 1929] A. Reuss; Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **9**:49–58, 1929.
- [Sanchez-Coronado e Chung 2003] J. Sanchez-Coronado e D.D.L. Chung; Thermomechanical Behavior of a Graphite Foam, *Carbon* **41**(6):1175–1180, 2003.
- [Sanchez-Palencia 1970] E. Sanchez-Palencia; Solutions Périodiques par Rapport aux Variables d’Espace Applications, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences—Série A* **271**:1129–1132, 1970.

- [Schapery 1968] R.A. Schapery; Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles, *Journal of Composite Materials* **2**(3):380–404, 1968.
- [Sideridis *et al.* 2005] E. Sideridis, V.N. Kytopoulos, E. Kyriazi, G. Bourkas; Determination of Thermal Expansion Coefficient of Particulate Composites by the use of a Triphase Model, *Composites Science and Technology* **65**(6):909–919, 2005.
- [Spagnolo 1968] S. Spagnolo; Sulla Convergenza di Soluzioni di Equazioni Paraboliche ed Ellittiche, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **22**(3):571–597, 1968.
- [Sun e Inal 1996] Q. Sun e O.T. Inal; Fabrication and Characterization of Diamond/Copper Composites for Thermal Management Substrate Applications; *Materials Science and Engineering B* **41**(2):261–266, 1996.
- [Tavman 2003] I.H. Tavman; *Thermal Conductivity of Particle Reinforced Polymer Composites*, Actas da NATO Advanced Study Institute (ASI) - Nanoengineered Nanofibrous Materials Conference, Kluwer Academic Book Publishers, Dordrecht, Holanda, Vol. 169, pp.449–455, 2003.
- [Terada *et al.* 1995] Y. Terada, K. Ohkubo, K. Nakagawa, T. Mohri, T. Suzuki; Thermal Conductivity of B2-Type Aluminides and Titanides, *Intermetallics* **3**(5):347–355, 1995.
- [Turner 1946] P.S. Turner; Thermal Expansion Stresses in Reinforced Plastics, *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **37**(10):239–250, 1946.
- [Voigt 1889] W. Voigt; Ueber die Beziehung Zwischen den Beiden Elastizitätskonstanten Isotroper Körper, *Annalen der Physik und Chemie* **38**:573–587, 1889.
- [Yoshida e Morigami 2004] K. Yoshida e H. Morigami; Thermal Properties of Diamond/Copper Composite Material, *Microelectronics Reliability* **44**(2):303–308, 2004.
- [Zimmerman 1992] , R.W. Zimmerman; Hashin-Shtrikman Bounds on the Poisson Ratio of a Composite Material, *Mechanics Research Communications* **19**(6):563–569, 1992.